代数几何

王向军*

南开16届暑期学校
2010年8月10-19

摘要: 本讲义是基于南开暑期学校代数拓扑的讲稿整理而得. 沿着代数拓扑的一条主线, 快速而简洁的给出了代数拓扑的一个概貌. 非常适合于那些没有接触过代数拓扑而又想了解一点代数拓扑知识的读者. 本讲义前三节讲同伦论后面几节都是讲同调论, 主要涉及同伦不变性、正合序列以及切除定理, 最后还提到了 Mayer-Vietoris 序列. 主要定理的证明都是比较难的, 也不可能在短短的几节课中讲明白. 从而授课者采取给出定理陈述、简单介绍定理证明思想、着重强调定理的运用的讲授方法. 希望本讲义笔记能给更多的人带来学习代数拓扑的愉悦体验, 事实上在学习过程中, 我觉得很多基本的概念都是非常自然的. 而这一理论在现代数学中的应用, 几乎是随处可见的.

主要参考书目

[1] 周建伟, 代数拓扑讲义, 北京:科学出版社, 2007, 很好的入门教材.

[2] M.J. Greenberg and J.R. Harper, *Algebraic topology: a first course*, Benjamin/Cummings Pub. Co., 1981, 学习奇异同调论.

[3] A. Hatcher, *Algebraic topology*, 清华大学出版社, 2005, 本质不容易搞清楚.

[4] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, vol. 2, Addison-Wesley Reading, MA, 1984.

代数拓扑基本来说分为两个部分, 一是同伦论, 二是同调论.

主要的目的是对拓扑空间进行(同胚)分类, 现在已经完成的是2维闭曲面的分类, 关于3维及其以上的闭流形的分类还不知道.

拓扑分类的一个基本的问题:

如何判断两个拓扑空间同胚?

代数拓扑的方法是引入**函子**的概念, 使得

$$\text{拓扑空间的范畴} \Rightarrow \text{代数(群、环)的范畴}$$
$$\text{拓扑空间 } X \Rightarrow \text{群 } G(X)$$
$$\text{映射 } f\colon X \to Y \Rightarrow \text{ 同态 } f\colon G(X) \to G(Y).$$

*Noted by Van Abel. Email: Van Abel

例1. • $\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚. (去掉一个点后的连通性)

• $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 不同胚. (基本群)

• $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 不同胚. (同调群)

1 同伦与基本群的概念

定义1.1. 设 $f, g\colon X \to Y$ 是两个映射[1], 如果存在 $F\colon X \times I = X \times [0,1] \to Y$, 使得对任何的 $x \in X$, 都有 $F(x,0) = f(x)$ 以及 $F(x,1) = g(x)$. 那么称 f 与 g **同伦**. 记为 $f \simeq g$, 或者 $f \overset{F}{\simeq} g$. F 称为 f 到 g 的**伦移**.

令 $F(x,t) = F_t(x)$, $t \in I$. F 是随时间 t 连续变化的映射.

定义1.2. 设 X, Y 是两个拓扑空间, 如果存在映射 $f\colon X \to Y$ 以及 $g\colon Y \to X$, 使 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_X$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_Y$, 则称 X, Y 是**同伦等价**的. 它比同胚弱.

例2. • 圆 S^1 与 $\mathbb{R}^2 / \{\mathrm{pt}\}$ 是同伦等价的.

• 圆盘 D^2 与单点集 $\{\mathrm{pt}\}$ 是同伦等价的.

• 环形带子 X 与 S^1 是同伦等价的.

• 圆环去掉一点与两个圆的一点并(相切)是同伦等价的.

• $\mathrm{So}(2) \simeq S^1$.

• $\mathrm{So}(3) \simeq \mathbb{R}P^3$.

注记. 基本群与同调群是同伦不变的.

定义1.3 (道路)**.** 拓扑空间 X 中一条**道路**是指映射 $\sigma\colon I \to X$. 且成 $\sigma(0) = x_0$ 为**起点**, $\sigma(1) = x_1$ 为**终点**.

注记. 拓扑空间 X 称为是**道路连通的**, 如果对 X 中任何两点都有一条道路与之相连.

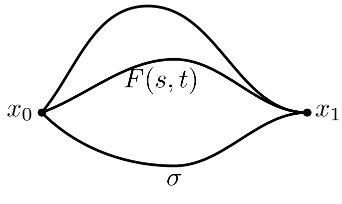
定义1.4 (道路同伦)**.** 设 σ, τ 是 X 中从 x_0 到 x_1 的道路, 如果存在同伦 $F\colon I \times I \to X$ 使得对任意的 $s, t \in I$ 都有

$$F(s,0) = \sigma(s), \quad F(s,1) = \tau(s),$$

且

$$F(0,t) \equiv x_0, \quad F(1,t) \equiv x_1.$$

那么称 σ, τ 是**道路同伦**的. 记作 $\sigma \overset{F}{\simeq}_{\mathrm{p}} \tau$ 或者 $\sigma = \tau \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.



注记. 若不加端点固定, 则道路连通空间中的任何两条道路都是道路同伦的.

[1] 我们说的映射, 除非特别说明, 都假定是连续的.

引理1.5. 映射同伦与道路同伦都是等价关系.

注记. 给定两个(拓扑)空间 X, Y, 从 X 到 Y 的同伦等价类记为

$$[X, Y] = Y^X / \simeq .$$

那么代数拓扑的基本问题就是对这个对这个等价类所成空间的研究, 即同伦分类.

例3.

$$[S^n, S^n] = \mathbb{Z}, \quad [S^{n-1}, S^n] = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \mathbb{Z}, & n = 2 \\ \mathbb{Z}/2, & n > 2. \end{cases}$$

注记. 类似地, 我们有道路同伦等价类. 记 $P_X = \{\sigma | \sigma : I \to X, \sigma \text{ 连续}\}$, 它是一个拓扑空间(有所谓的**紧开拓扑**). 那么道路同伦等价类记为

$$P_X / \simeq_{\mathrm{p}} = \{[\sigma] | \sigma \text{ 是 } X \text{ 中的道路}\}.$$

定义1.6. 设 σ, τ 是 X 中的两条道路, 且 $\sigma(1) = \tau(0) = x_1$, 则可定义 σ 与 τ 的**乘积道路**为

$$\sigma \cdot \tau : I \to X$$

$$\sigma \cdot \tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & 0 \le s \le 1/2, \\ \tau(2s - 1), & 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

引理1.7. *如果 $\sigma \simeq_{\mathrm{p}} \sigma'$, $\tau \simeq_{\mathrm{p}} \tau'$ 且 $\sigma \cdot \tau$ 可定义, 则 $\sigma' \cdot \tau'$ 也可定义且 $\sigma \cdot \tau \simeq_{\mathrm{p}} \sigma' \cdot \tau'$.*

从而, 可知道路同伦等价类中定义运算

$$[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma \cdot \tau].$$

定理1.8. *道路同伦等价类集 $P_X / \simeq_{\mathrm{p}}$ 中运算满足*

i) ***结合律***

$$([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot [\eta] = [\sigma] \cdot ([\tau] \cdot [\eta]).$$

ii) ***左右单位元*** *对 $x \in X$, 记 e_x 为 x 点处的常值道路 $e_x(s) \equiv x$. 则对任何一条道路 σ ($\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$), 有*

$$[e_{x_0}] \cdot [\sigma] = [\sigma] \cdot [e_{x_1}] = [\sigma].$$

iii) ***逆元素*** *对任意的 $\sigma : I \to X$, 定义 σ 之逆道路 $\sigma^{-1} : I \to X$, 为 $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$. 则*

$$[e_{x_0}] = [\sigma] \cdot [\sigma^{-1}], \quad [\sigma] \cdot [\sigma^{-1}] = [e_{x_1}]$$

在 X 中选定基点 x_0, 记

$$\Omega_X = \{\sigma : I \to X | \sigma(0) = x_0 = \sigma(1)\},$$

为闭路的集合, 它也有拓扑. 又其等价类的集合记为

$$\Omega_X / \simeq_{\mathrm{p}} = \{[\sigma] | \sigma : I \to X, \sigma(0) = \sigma(1) = x_0\}.$$

这样, 对任何 $[\sigma], [\tau] \in \Omega_X / \simeq_{\mathrm{p}}$, $[\sigma] \cdot [\tau]$ 以及 $[\tau] \cdot [\sigma]$ 都有定义. 从而 $\Omega_X / \simeq_{\mathrm{p}}$ 在道路的乘积运算下构成群, 称为 X 的**基本群**. 记作 $\pi_1(X, x_0)$.

注记. • 基本群不一定交换, 即 $[\sigma]\cdot[\tau]=[\tau]\cdot[\sigma]$ 不一定成立.

定理1.9. 对任何群 G, 都存在拓扑空间 X, 使得 $\pi_1(X,x_0)=G$.

• 基本群又称为1维同伦群. 注意到 Ω_X 为一拓扑空间, 若取定基点 $[e_{x_0}]$, 则可以继续构作2维同伦群

$$\pi_2(X,x_0)=\pi_1(\Omega_X,[e_{x_0}]).$$

完全类似地, 若记 $\Omega_X^2=\Omega_{\Omega_X}$, 则可定义3维同伦群为

$$\pi_3(X,x_0)=\pi_2(\Omega_X^2,C_0),$$

等等...

基本群的特点

设 $f\colon X\to Y$ 是映射, 则对 X 中任何闭路 $\sigma\colon I\to X$, $f\circ\sigma\colon I\xrightarrow{\sigma}X\xrightarrow{f}Y$ 是 Y 中的闭路, 且当 $\sigma\simeq_{\mathrm{p}}\tau$ 时, $f\circ\sigma=f\circ\tau$.

定义1.10. 对于映射 $f\colon X\to Y$ 可导出基本群的映射 $f_*\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$, $f_*(\sigma)=[f\circ\sigma]$. 这里 $y_0=f(x_0)$.

定理1.11. $f\colon X\to Y$ 导出基本群的同态 $f_*\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是群同态. 而且还满足

i) 对 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, 有

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*.$$

即下列图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "g_*"] \\
& \pi_1(Z,z_0).
\end{tikzcd}$$

ii) $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ 导出的 $(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$.

注记. 基本群一定是同胚不变量, 实际上它还是同伦不变量.

注记. 同伦不变的意思是指: 设 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$, $g\colon(Y,y_0)\to(X,x_1)$ 满足 $g\circ f\simeq\mathrm{id}_X$, $f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$, 则

$$f_*\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0),$$

以及

$$g_*\colon\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,x_1),$$

都是同构.

证明: 证明有些复杂, 需要讨论基点的作用. □

2 圆的基本群及其应用

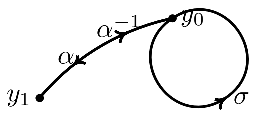
回忆, 基本群 $\pi_1(X,x_0)=\{[\sigma]|\sigma\colon I\to X,\sigma(0)=\sigma(1)=x_0\}$ 它是拓扑不变量. 即, 若 $f\colon X\to Y$ 是同胚, 则 $f_*\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是群同构.

事实上, 基本群还是同伦不变量. 设 $f,g\colon X\to Y$ 是两个同伦映射. F 是 f 到 g 的伦移. 又设 $f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=y_1$. 对 $F\colon X\times I\to Y$, 令 $\alpha(s)=F(x_0,s)$. 则 $\alpha(0)=F(x_0,0)=f(x_0)=y_0$, $\alpha(1)=F(x_0,1)=g(x_0)=y_1$. 这说明 $\alpha\colon I\to Y$ 是从 y_0 到 y_1 的一条道路.

引理2.1. *若 $f\simeq g$, 则有如下交换图*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dd, "\hat{\alpha}"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y,y_1).
\end{tikzcd}$$

其中 $\hat{\alpha}\colon\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(Y,y_1)$ 定义为 $[\sigma]\mapsto[\alpha^{-1}\cdot\sigma\cdot\alpha]$, 它是一个同构. 因而道路连通的拓扑空间之基本群与基点的选择无关.



定理2.2. *若 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是空间的同伦等价映射. $g\colon Y\to X$ 是 f 的**同伦逆**, 即*

$$g\circ f\simeq \mathrm{id}_X,\quad f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y.$$

又设 $g\circ f(x_0)=g(y_0)=x_1$, $f\circ g(y_0)=f(x_1)=y_1$. 则有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,x_1) \arrow[dd, "\hat{\alpha}"] & & \pi_1(Y,y_1) \arrow[dd, "\hat{\beta}"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_*"'] & & \pi_1(Y,y_0) \arrow[ur, "f_*\circ g_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_*"'] & \\
 & \pi_1(X,x_0) & & \pi_1(Y,y_0).
\end{tikzcd}$$

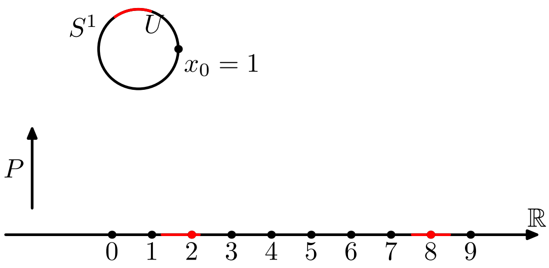
由此可以证明基本群是同伦不变的.

下面我们来考虑圆的基本群及其应用. 记 $S^1=\{z=e^{2\pi it}\in\mathbb{C}|t\in\mathbb{R}\}$ 是复平面上的单位圆. 取定基点 $x_0=e^0=1$.

定理2.3. *$\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}$, 其生成元是 $[\sigma_1]$,*

$$\begin{array}{rcl}\sigma_1\colon I & \to & S^1,\\ s & \mapsto & e^{2\pi is}.\end{array}$$

为了证明上述定理, 我们构造映射 $P\colon\mathbb{R}\to S^1$, 满足



- 对任意 $z_0 = e^{2\pi i t_0} \in S^1$, 有 $P^{-1}(z_0) = \{t_0 \pm n | n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.
- 对于 S^1 上任意一段弧 U, 有 $P^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{Z}$.

即 P 是保持基点不动的覆盖映射.

我们还需要

引理2.4 (道路提升引理)**.** *假设 $\sigma: I \to S^1$ 是圆上的一道路, 起点为 $x_0 = 1$. 那么存在唯一的道路 $\sigma^1: I \to \mathbb{R}$ 是 $\sigma^1(0) = 0$ 且 $P \circ \sigma' = \sigma$. 称 σ' 为 σ 的**道路提升**.*

引理2.5 (覆盖同伦引理)**.** *若 σ, τ 是圆上两道路同伦的道路. $F: I \times I \to S^1$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移. 令 $\sigma(0) = \tau(0) = x_0 = 1$. 则存在违约的同伦 $F': I \times I \to \mathbb{R}$ 使得 $F'(0,0) = 0$ 且 $P \circ F' = F$. F' 称为 F 的**覆盖同伦**.*

注记. 覆盖同伦引理蕴含着道路提升引理.

我们有以下事实

- $\sigma'(s) = F'(s,0)$ 满足 $\sigma'(0) = 0$, $P \circ \sigma'(s) = P \circ F'(s,0) = F(s,0) = \sigma(s)$, 即 σ' 是 σ 的道路提升.
- $\tau'(s) = F'(s,1)$ 满足 $P \circ \tau'(s) = P \circ F'(s,1) = F(s,1) = \tau(s)$.
- 对任意的 $t \in I$, $P \circ F'(0,t) = F(0,t) \equiv x_0 = 1$. 故 $F'(0,t) \in P^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$. 因 $\{0\} \times I$ 是连通的, 故 $F'(0,t) \equiv 0$. 即 $\tau'(0) \equiv 0$.
- 同理, 若 $\sigma'(1) = k$, 则 $\tau'(1) = k$.

现在来证明定理.

证明: 构作 $\chi: \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}$, 对任意的 $[\sigma] \in \pi_1(S^1, x_0)$, σ 在 $\mathbb{R}$ 中有提升 $\sigma': I \to \mathbb{R}$, $\sigma'(0) = 0$. 有 $P \circ \sigma'(1) = x_0 = 1$, 知 $\sigma'(1) \in \mathbb{Z}$. 定义

$$\chi([\sigma]) = \sigma'(1) \in \mathbb{Z}.$$

若 $\sigma \simeq_{\mathrm{p}} \tau$, 则 $\sigma'(1) = \tau'(1)$. 从而定义是良好的.

- χ 是同态. 即
$$\chi([\sigma] \cdot [\tau]) = \chi([\sigma]) + \chi([\tau]).$$
事实上, $\sigma \cdot \tau = \sigma'(\tau' + \sigma'(1))$.
- χ 是满射.
事实上, 对任何 $n \in \mathbb{Z}$, 令 $\sigma_n: I \to S^1$ 为 $\sigma_n(s) = e^{2\pi i n s}$ 则 $\chi([\sigma_n]) = n$.

- χ 是单射.

  若 $\chi([\sigma]) = \chi(\tau) = n$, 则提升 $\sigma'(0) = \tau'(0) = 0$, $\sigma'(1) = \tau'(1) = n$. 即是直线 $\mathbb{R}^1$ 上有相同起点、终点的道路同伦, 即 $\sigma' \simeq_{\mathrm{p}} \tau'$ 蕴含 $P \circ \sigma' \simeq_{\mathrm{p}} P \circ \tau'$. 即 $[\sigma] = [\tau]$.

$\square$

例4. 单位圆盘. S^1 为 D^2 的边界圆, 则不存在这样的映射 $\gamma\colon D^2 \to S^1$ 使 $\gamma \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$. 即圆不是圆盘的收缩核.

$$\gamma \circ i = \mathrm{id}_{S^1}: \qquad \begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & D^2 \arrow[d, "\gamma"] \\ & S^1. \end{tikzcd}$$

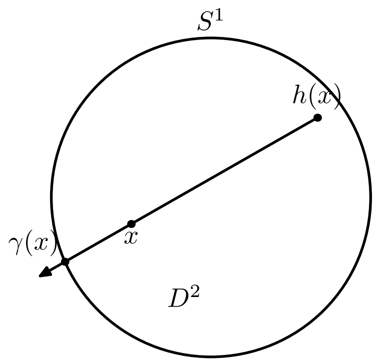
证明: 假设存在, 取定基点 $x_0 \in S^1$, 则有

$$\gamma_* \circ i_* = \mathrm{id}: \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(D^2, x_0) \arrow[d, "\gamma_*"] \\ & \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

但是, D^2 是同伦等价于 x_0 的, 即 $D^2 \simeq x_0$. 故 $\pi_1(D^2, x_0) = \pi_1(x_0, x_0) = 0$. 这与上面的图交换矛盾. $\square$

定理2.6 (Brouwer 不动点定理)**.** 任何连续映射 $h\colon D^2 \to D^2$ 都有不动点. 即存在 $x_0 \in D^2$ 使得 $h(x_0) = x_0$.

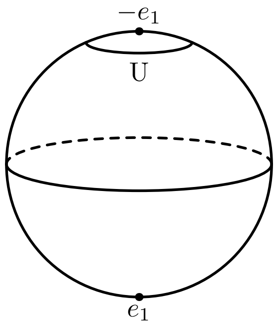
证明: 若有 $h\colon D^2 \to D^2$ 之映射, 使得对任意的 $x \in D^2$ 都有 $h(x) \neq x$. 则令 $\gamma(x)$ 为连接 $h(x)$ 与 x 的射线与 S^1 之交点.



当 $x \in S^1$ 时, $\gamma(x) = x$. 即有映射 $\gamma\colon D^2 \to S^1$ 满足 $\gamma \circ i = \mathrm{id}$. 矛盾! $\square$

注记. 利用圆的基本群还可以证明代数学基本定理. 反设无复根则可构作一同伦使圆的基本群中单位元和绕 n 圈的元一样.

例5. 记 S^n 为标准的 n 维球面, 取基点 $e_1 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{ 个}})$. 当 $n > 1$ 时, $\pi_1(S^n, e_1) = 0$.



证明: 对任何映射 $f\colon X \to S^n$, $n > 1$. 若 $-e_1$ 不在 f 的像中, 则 $f \simeq_{\mathrm{p}} C_{e_1}$, C_{e_1} 为常值映射, 即 $C_{e_1}(x) = e_1$. 若对任意的 $x \in X$, 都有 $f(x) \neq -e_1$. 则对任意 $t \in I$, 有

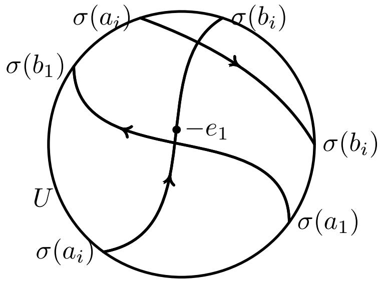
$$(1-t)\cdot f(x) + t\cdot e_1 \neq 0,$$

构作同伦

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + te_1}{\|(1-t)f(x) + te_1\|},$$

则 $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = e_1$.

下面证明, 对任何闭路 $\sigma\colon I \to S^1$, 只需要证明 $\sigma \simeq_{\mathrm{p}} \sigma'$. σ' 满足 $-e_1$ 不在 σ' 的像中. 找包含 $-e_1$ 的一个小开邻域 U, 使 U 同胚于 D^n. 现在, $\sigma\colon I \to S^n$ 连续, $\sigma^{-1}(U)$ 是 I 中的开集. 即 I 中一些小开区间 (a_i, b_i) 的并. 只选 σ 在 (a_i, b_i) 内过 $-e_1$ 的线段, 设为 $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, (它只有有限个, 否则它们将收敛到 $-e_1$, 不在出去).



把线段移到 U 的边界上, 则得 σ' 不经过 $-e_1$.

这样, $\sigma \simeq_{\mathrm{p}} \sigma' \simeq_{\mathrm{p}} C_{e_1}$. □

注记. 由此还可证明 $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^3$. 因 $\mathbb{R}^2/\{\mathrm{pt}\} \cong S^1$, $\mathbb{R}^3/\{\mathrm{pt}\} \cong S^2$.

3 Van-Kampen 定理

设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一集簇.

直积: $\Pi_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, 它中的元素可看成映射 $g\colon \Lambda \to G_\alpha$, $\alpha \mapsto g_\alpha$. 乘积 $g\cdot f\colon \alpha \mapsto g_\alpha \cdot f_\alpha$.

直和: $\oplus_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, 它中的元素也可看作映射 $g\colon \Lambda \to G_\alpha$, $\alpha \to g_\alpha$. 但它只有有限个 g_α 不是 G_α 中的单位元 e_α.

当 Λ 为一有限集时, 则当 G_α 都交换时, $\Pi_{\alpha\in\Lambda} \cong \oplus_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$; 但当 Λ 为无限集是, 即使 G_α 都交换, $\Pi_{\alpha\in\Lambda}$ 与 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ 也不同.

例6. 令 $\Lambda = \mathbb{N}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $G_n = \mathbb{Z}/\{10\}$. 则 $\Pi_{n=1}^{\infty} G_\alpha$ 的元素是 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$; 它代表的是无理数. 而 $\oplus G_\alpha$ 的元素是 $(a_1,\, a_2,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, a_n,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)$–有限个非零; 它代表的是部分有理数(不包括循环小数).

自由积:

定义3.1. 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一簇群, 定义 $\{G_\alpha\}_\alpha \in \Lambda$ 的自由积: $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ 为一个群. 且

1) G_α 的单位元 $e_\alpha = e$.

2) $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ 中的元素是任何有限长的字, 即 $g_1 g_2 \ldots g_n$ (有限个元素之顺序写出), 其中 $g_i \in G_{\alpha_i}$.

3) 乘积 $(g_1 g_2 \ldots g_n) \cdot (h_1 h_2 \ldots h_m) = g_1 g_2 \ldots g_n \cdot h_1 h_2 \ldots h_m$ 且当 $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ 时, 且 $g_i \cdot g_{i+1} = g' \in G_\alpha$. 则
$$g_1 g_2 \ldots (g_i g_{i+1}) \ldots g_m = g_1 g_2 \ldots (g') \ldots g_m.$$

4) $g_1 g_2 \ldots g_m$ 的逆为 $(g_m^{-1}) \ldots (g_2^{-1})(g_1^{-1})$.

例7. $\mathbb{Z}_a = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_b = \{b^n | n \in \mathbb{Z}\}$. 则 $\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$ 中的元素是: $a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \ldots a^{n_k} b^{m_k}$. $\mathbb{Z}_a \cdot \mathbb{Z}_b$ 又称为由 a, b 两个元素生成的自由群. 记作 $F\{a, b\}$.

例8. 设 Λ 是一个下标集,对任何的 $\alpha \in \Lambda$, 记
$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha^n | n \in \mathbb{Z}\}$$
为由 α 生成的自由 Abel 群. $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} \mathbb{Z}_\alpha$ 称为由 Λ 生成的自由群, 记作 $F\{\Lambda\}$.

思考. Λ 生成的自由 Abel 群应该是直和??

引理3.2. *设 Λ 为一个下标集, G 是一个群. 则任何集合的映射 $f: \Lambda \to G$ 都可以唯一的扩充成一个群的同态 $\tilde{f}: F\{\Lambda\} \to G$.*

证明:
$$\tilde{f}(\alpha_1^{n_1} \ldots \alpha_m^{n_m}) = f(\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot f(\alpha_m)^{n_m}.$$
□

自由群的作用

定理3.3. *任何一个群 G 都是某个自由群的商群. 进而任何一个群都可由一个基本群来实现.*

证明: 令 $\tilde{G}$ 为 G 中所有元素所成的集合. $F\left\{\tilde{G}\right\}$ 是自由群.
$$\begin{aligned} f: \tilde{G} &\to G \\ a &\mapsto a, \end{aligned}$$
是一个集合映射. 它可扩充成群同态 $\tilde{f}: F\left\{\tilde{G}\right\} \to G$, 且是满射. 从而
$$G \cong F\{\tilde{G}\}/\ker \tilde{f}.$$
□

例9. $F\{a,b\}/<aba^{-1}b^{-1}>$, 其中 $<aba^{-1}b^{-1}>$ 为由 $aba^{-1}b^{-1}$ 生成的正规子群.

这说明 $aba^{-1}b^{-1}=e$, 即 $ab=ba$. 即

$$F\{a,b\}/<aba^{-1}b^{-1}>=\mathbb{Z}_a\oplus\mathbb{Z}_b.$$

例10. $F\{a,b\}/<aba^{-1}b^{-1},a^2,b^3>\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/3\cong\mathbb{Z}/6.$

定理3.4 (Van Kampen)**.** 设 X 为分成两个开子集 U,V 的并. 满足

1) $X=U\cap V$, 基点 $x_0\in U\cap V$.

2) $U,V,U\cap V$ 都是道路连通的.

则有如下结论:

i) 内射导出基本群的同态. 令

$$\begin{aligned} i_1&\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(U,x_0)\\ i_2&\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(V,x_0)\\ j_1&\colon\pi_1(U,x_0)\to\pi_1(X,x_0)\\ j_2&\colon\pi_1(V,x_0)\to\pi_1(X,x_0)\end{aligned}$$

j_1,j_2 可导出 $j\colon\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$. 对任何的 $\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$ 中的元素, 可写成

$$[\sigma_1][\tau_1][\sigma_2][\tau_2]\cdots[\sigma_n][\tau_n],$$

其中 $[\sigma_i]\in\pi_1(U,x_0)$, $[\tau_1]\in\pi_1(V,x_0)$ 定义 j 如下

$$\begin{aligned} j([\sigma_1][\tau_1][\sigma_2][\tau_2]\cdots[\sigma_n][\tau_n])&=j_1([\sigma_1])\cdot j_2([\tau_1])\cdot j_1([\sigma_2])\cdot j_2([\tau_2])\cdot\cdots j_1([\sigma_n])\cdot j_2([\tau_n])\\ &=[\sigma_1\cdot\tau_1\sigma_2\cdot\tau_2\cdots\sigma_n\cdot\tau_n],\end{aligned}$$

这里是 X 中的乘积.

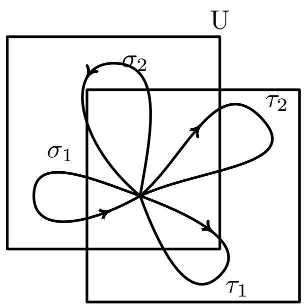


图 1: U,V 的分解以及映射 j.

ii) 映射 j 是满同态.

iii) 对 $\pi_1(U\cap V,x_0)$ 中的 $[\sigma]$, 在自由积 $\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$ 中, $i_1([\sigma])i_2([\sigma]^{-1})\neq$ 单位元 e, 但 $j\left(i_1([\sigma])\cdot i_2([\sigma]^{-1})\right)=e\in\pi_1(X,x_0)$.

iv) $\ker j=$ 所有 $i_1([\sigma])\cdot i_2([\sigma]^{-1})$ 生成的 $\pi_1(X,x_0)$ 正规子群. 其中 $[\sigma]\in\pi_1(U\cap V,x_0)$.

应用举例

例11. 设 $X=S^1\vee S^1$- S^1 的**一点和**. 求 $\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)$.

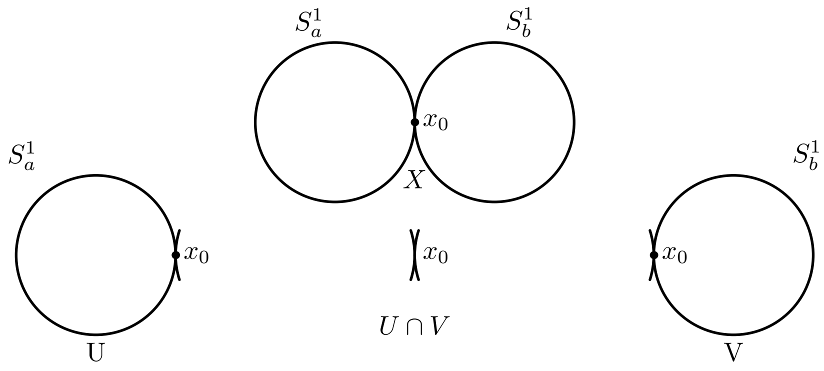


图 2: $S^1\vee S^1$ 的分解

证明: 如图, 将 X 分解为两个开集 U,V 的并. 那么, 由于 U,V 的触角都是可缩的, 从而 $\pi_1(U,x_0)=\mathbb{Z}_a$, $\pi_1(V,x_0)=\mathbb{Z}_b$, $\pi_1(U\cap V,x_0)=\{e\}$. 这样, 由 Van-Kampen 定理,

$$\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)=\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N.$$

其中, $N=<i_1([e])\cdot i_2([e]^{-1})>=e$ ($i_1([e])\cdot i_2([e]^{-1}$ 所生成的正规子群), 这是因为 $i_1([e]),i_2([e])$ 分别是 $\pi_1(U,x_0)$ 和 $\pi_1(V,x_0)$ 所对应的单位元, 按照自由群的定义, 它们是一致的.

于是 $\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)=\mathbb{Z}_a*\mathbb{Z}_b=F\{a,b\}$. □

注记.
- 上例 $F\{a,b\}$ 的元素所代表的几何意义如下. 例如, $a^2b\cdot a^{-1}b^2$ 代表依次左两周、右一周、左反向一周、右两周的旋转.
- 将上述讨论一般化: 令 $Y=\vee_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha^1$, 对任意的 $\alpha\in\Lambda$, $S_\alpha^1\cong S^1$. 则 $\pi_1(Y,S_\alpha^1)=F\{\Lambda\}$.

  思考, 若 Λ 是一个无限集, 能否通过群的极限来解释上述公式成立?

去掉空间的某些元素

设 X 是一个拓扑空间. $[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$, $\sigma\colon I\to X$. σ 可以对应一个映射 $\tilde\sigma\colon S^1\to X$, $S^1=\left\{e^{2\pi \mathrm{i}t}\in\mathbb{C}|t\in[0,1]\right\}$, $\tilde\sigma(e^{2\pi\mathrm{i}t})=\sigma(t)$. S^1 也可看作圆盘 D^2 的边界. 将 D^2 的边界 S^1 按照 $e^{2\pi\mathrm{i}t}\sim\tilde\sigma(e^{2\pi\mathrm{i}t})$ 的规则粘接在 X 上, 得到的空间记为 $X\cup_{\tilde\sigma}D^2$.

定理3.5. 令 $x_0=\tilde\sigma(e^0)$, 则

$$\pi_1(X\cup_{\tilde\sigma}D^2,x_0)=\pi_1(X,x_0)/<[\sigma]>,$$

其中 $<[\sigma]>$ 为由 σ 生成的正规子群.

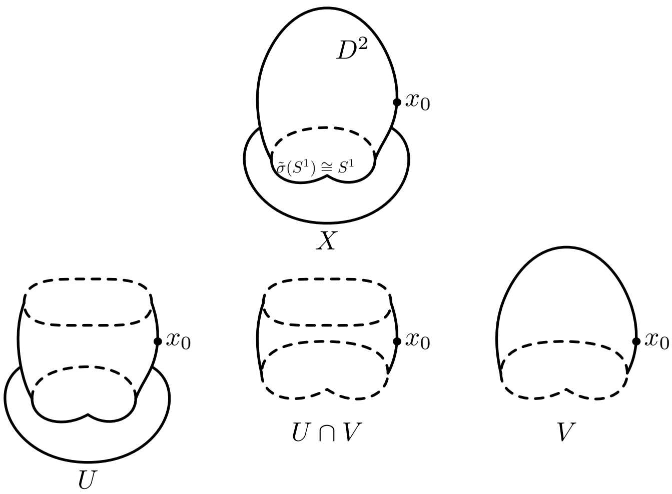


图 3: $X \cup_{\tilde{\sigma}} D^2$ 的分解

证明: $U \cong X$, $f\colon U \xrightarrow{\text{压下来}} X$. 因此, $\pi_1(U,x_0) \cong \pi_1(X,x_0)$. 注意到 V 可缩, 于是 $\pi_1(V,x_0) = \{e\}$. 而 $U \cap V$ 与 S^1 同胚, 从而 $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}_{[\sigma_1]}$, 其中 $[\sigma_1]$ 是圆上的闭路.

由 Van-Kampen 定理,

$$
\begin{aligned}
\pi_1(X,x_0) &= \pi(U,x_1) \cdot \{e\} \,/ < i_1([\sigma_1]) \cdot i_2([\sigma]^{-1}) > \\
&= \pi_1(U,x_0)/ < i_1([\sigma_1]) > \quad \text{因 } i_2\colon \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(V,x_0) = \{e\}. \\
&= \pi_1(X,x_0)/ < [\sigma] > . \quad \text{用 } f_* \text{ 诱导}.
\end{aligned}
$$

□

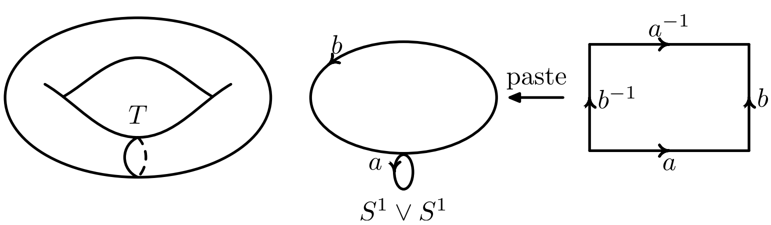
注记. 这样就可以证明对任何一个群 G, 都可以用一个基本群来实现. 即, 粘上那些要模掉的.

例12. 求 $T = S^1 \times S^1$ 的基本群.

证明: **法一:**

$$
\begin{aligned}
\pi_1(S^1 \times S^1, x_0) &= \pi_1(S^1,x_0) \times \pi_1(S^1,x_0) \\
&= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

法二:



如图, 令 $T = (S^1 \vee S^1) \cup_{\tilde{\sigma}} D^2$, $[\tilde{\sigma}] = aba^{-1}b^{-1}$. 则, $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = F\{a,b\} \,/ < aba^{-1}b^{-1} > \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. □

思考. 同理, 考虑 $\mathbb{R}P^2$, Kelien 瓶, So(2), So(3), $\mathbb{R}P^n$ 的基本群.

4 奇异同调群

它是拓扑中的难点, 有三个主要的定理: 切除定理、Mayer-Vietoris 序列、泛系数定理. 奇异同调群其实就是一个函子.

设 R 是一个主理想整环. 回忆 R-模的定义(它可看成线性空间的推广). 注意有些 R-模不是自由的, 但是线性空间都是自由模. 常见的主理想整环有 $R=\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}/p$ 其中 p 为素数、 $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$. 后三者还是域. 注意域上的模和域上的线性空间是一致的.

定义4.1. 设 $\{c_n\}$ 是一簇 R-模. 若存在同态 $\partial_n\colon C_n\to C_{n-1}$ 使得 $\partial_n\circ\partial_{n+1}=0$ (零同态):

$$C_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}}C_n\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}.$$

一般地, 我们如下的表示同态序列

$$\cdots\longrightarrow C_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}}C_n\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\longrightarrow C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}0.$$

则称 $C=\{C_n,\partial_n\}_{n\geq 0}$ 为一个**链复形**. ∂_n 称为**边缘同态**. C_n 称为 **n-维链**.

定义4.2. 假设 $C=\{C_n,\partial_n\}_{n\geq 0}$ 是一个链复形. 定义 C_n 的子模 $\mathbb{Z}_n(C)=\ker\partial_n$, 称为链复形 C 的 n-维**闭链**(模). $B_n(C)=\mathrm{Im}\,\partial_{\mathrm{n+1}}$ 称为链复形 C 的**边缘链**(模). 它们都是交换群. 容易知道, $B_n(C)\subset\mathbb{Z}_n(C)$. 从而可作商群 $H_n(C)=\mathbb{Z}_n(C)/B_n(C)$, 称为 C 的 n-维**同调群**.

例13. 令 $C_n\equiv\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$-模), 而

$$\partial_{2k}=2\colon\quad \begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\\ \| & & \|\\ C_{2k} & \to & C_{2k-1}\\ k & \longmapsto & 2k\end{array}\qquad\qquad \partial_{2k-1}=0\colon\quad \begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\\ \| & & \|\\ C_{2k-1} & \to & C_{2k-2}\\ k & \longmapsto & 0.\end{array}$$

则我们有

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{2k+1} \arrow[r, "\partial_{2k+1}"] \arrow[d, equal] & C_{2k} \arrow[r, "\partial_{2k}"] \arrow[d, equal] & C_{2k-1} \arrow[r, "\partial_{2k-1}"] \arrow[d, equal] & C_{2k-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & 0\\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

即 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 是链复形. 而且

- 当 $n=2k$ 时, $\ker\partial_{2k}=0$, $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathrm{2k+1}}=0$. 从而 $H_{2k}(C)=0$.
- 当 $n=2k-1$ 时, $\ker\partial_{2k-1}=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathrm{2k}}=2\mathbb{Z}$. 从而 $H_{2k-1}(C)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\mathbb{Z}/2$.
- 当 $n=0$ 时, $\ker\varepsilon=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_1=0$. 从而 $H_0(C)=\mathbb{Z}/0=\mathbb{Z}$.

注记. 上面这个例子是无限维实射影空间的同调群.

定义4.3. 设 $C=\{C_n,\partial_n\}_{n\geq 0}$, $D=\{D_n,\partial'_n\}_{n\geq 0}$ 是两个链复形. 如对任意的 $n\geq 0$, 有同态 $f_n\colon C_n\to D_n$ 使得 $\partial'_n f_n=f_{n-1}\partial_n$, 也即下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, bend left, "f_{n-1}\circ\partial_n"] \arrow[dr, bend right, "\partial'_n\circ f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & 0\\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

则称 $f=\{f_n\}_{n\geq 0}$ 为从链复形 C 到 D 的一个**链映射**.

注记. 链映射有如下性质

- $f_n(\mathbb{Z}_n(C)) \subset \mathbb{Z}_n(D)$;
- $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$.

于是由群的同态基本定理得到如下

定理4.4. 设 $f\colon C \to D$ 是一个链映射, 则 f 可导出同调群的同态

$$f_*\colon H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{\mathrm{n+1}} \to \mathrm{H_n(D)} = \ker \partial'_{\mathrm{n}} / \operatorname{Im} \partial'_{\mathrm{n+1}}.$$

链复形的构造–奇异单形

记 $\mathbb{R}^\infty = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) | \text{只有有限个 } x_i \neq 0\big\}$, 称为无穷维欧氏空间. 在 $\mathbb{R}^\infty$ 中自然的定义加法和数乘, 它可以成为一个线性空间. 定义其上的距离

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2},$$

这里 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$.

明显地, $\mathbb{R}^n$ 中的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可以自然的看作 $\mathbb{R}^\infty$ 的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$. 这样容易得到无穷维球面、无穷维射影空间的概念.

令

$$\begin{array}{rcl}
e_0 & = & (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\
e_1 & = & (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\
e_2 & = & (0, 2, \ldots, 0, \ldots) \\
\vdots & & \vdots \\
e_n & = & (0, 0, \ldots, \overset{\text{第 } n \text{ 个}}{n}, \ldots) \\
\vdots & = & \vdots
\end{array}$$

对任何 $n \geq 0,\ e_0, e_1, \ldots, e_n$ 张成一个凸多面体 Δ^n,

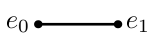
$$\Delta^n = \left\{ t_0 e_0 + t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n | t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\},$$

称为 n-维**标准单形**.

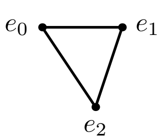
容易知道,

0维标准单形是一个点 e_0

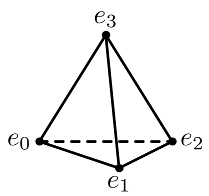
1维标准单形是以 e_0, e_1 为端点的线段



2维标准单形是以 e_0, e_1, e_2 为顶点的三角形



3维标准单形是以 e_0, e_1, e_2, e_3 为顶点的四面体



等等...

对任何一个 $i = 0, 1, \ldots, n$. 将对应

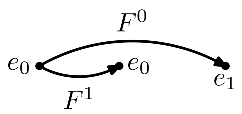
$$e_0, e_1, \ldots, e_{n-1} \to e_0, e_1, \ldots, e_{i-1}, \hat{e}_i, e_{i+1}, \ldots, e_n,$$

作线性扩张, 得到映射 $F^i\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$,

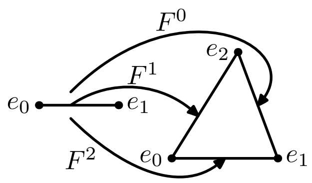
$$F^i(t_0e_0 + t_1e_1 + \cdots t_{n-1}e_{n-1}) = t_0e_0 + \cdots t_1e_1 + t_{i-1}e_{i-1} + t_ie_{i+1} + \cdots + t_{n-1}e_n.$$

称为 Δ^n 的**第 i 个面**(算子).

例14. 考察 $F^i\colon \Delta^0 \to \Delta^1$, $i = 0, 1$. 容易知道



完全类似地, 考察 $F^i\colon \Delta^1 \to \Delta^2$, $i = 0, 1, 2$. 容易知道



引理4.5. 当 $j < i$ 时,

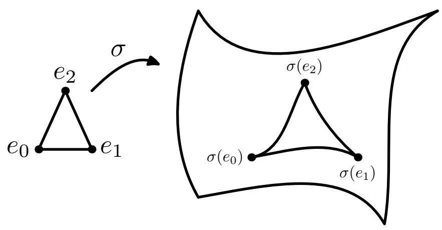
$$\begin{tikzcd}
\Delta^{n-1} \arrow[r, shift left, "F^j"] \arrow[r, shift right, "F^{i-1}"'] \arrow[rr, bend left, "F^i \circ F^j"] \arrow[rr, bend right, "F^j \circ F^{i-1}"'] & \Delta^n \arrow[r, shift left, "F^i"] \arrow[r, shift right, "F^j"'] & \Delta^{n+1}
\end{tikzcd}$$

即,

$$F^i \circ F^j = F^j \circ F^{i-1}.$$

定义4.6. 设 X 是一个拓扑空间. R 是一个主理想整环. 一个连续映射 $\sigma\colon \Delta^n \to X$ 称为 X 的一个**奇异单形**.

注记. 注意, 奇异单形指的是整个映射, 从而单形相同指的是作为映射完全一样.

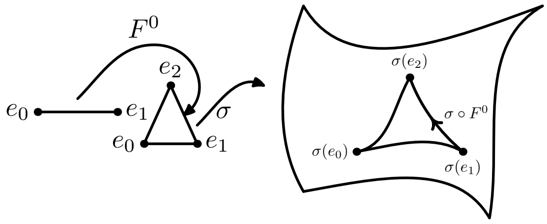


令 $S_n(X)$ 为 X 的所有 n-维奇异单形生成的自由 R-模. 即

$$
\begin{aligned}
S_n(X) &= \{\text{以所有 } n\text{-维奇异单形为基生成的线性空间}\} \\
&= \left\{ \sum_{\text{有限个}j} r_j\sigma_j | r_j \in R, \sigma_j\colon \Delta^n \to X \right\}.
\end{aligned}
$$

称为 X 的 n-维 R 系数**奇异链**(模).

对 X 的一个 n 维奇异单形 $\sigma\colon\Delta\to X$. 复合映射 $\sigma\circ F^i\colon\Delta^{n-1}\xrightarrow{F^i}\Delta^n\xrightarrow{\sigma}X$ 是一个 $n-1$ 维的奇异单形. 这样的奇异单形一共有 $n+1$ 个.



如图所示, $\sigma\circ F^0$ 就是从 $\sigma(e_1)$ 到 $\sigma(e_2)$ 的道路.

对 $\sigma\in S_n(X)$, 定义

$$
\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ F^i \in S_{n-1}(X).
$$

对 ∂_n 作线性扩充得到(环)同态

$$
\begin{aligned}
\partial_n\colon S_n(X) &\to S_{n-1}(X) \\
\textstyle\sum_j r_j\sigma_j &\mapsto \textstyle\sum_j r_j\,(\partial_n\sigma_j)
\end{aligned}
$$

引理4.7. 因 $\partial_n\partial_{n+1}=0$, 故 $S(X)=\{S_n(X),\partial_n\}$ 是一个链复形. 记为 $S(X)$ 或者 $S(X,R)$, 它对应的 $H_n(S(X))$ 称为 X 的 R 系数 n-维(非退化)奇异同调群. 记作 $H_n(X,R)$. 当主理想整环 $R=\mathbb{Z}$ 时, $H_n(X,\mathbb{Z})$ 称为整系数奇异同调群, 记作 $H_n(X)$.

证明: 利用关系, 当 $j<i$ 时, $F^i\circ F^j = F^j\circ F^{i-1}$. □

$H_n(X,R)$ **中的元**

链复形

$$
\cdots\longrightarrow S_{n+1}(X)\xrightarrow{\partial_{n+1}}S_n(X)\xrightarrow{\partial_n}S_{n-1}(X)
$$

中, $\mathbb{Z}_n(X)=\ker\partial_n$ 中的元 $z_n=\sum r_j\sigma_j$ 应满足

$$
\begin{aligned}
\partial_n(z_n) =& \sum_j r_j\partial_n(\sigma_j) \\
=& \sum_j f_j \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_j\circ F^i \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

即, 所有相同的映射 $\sigma_j\circ F^i$ 的系数之和为0. $\mathbb{Z}_n(X)$ 称为一个 n-**维闭链**.

$B_n(X) = \operatorname{Im}\partial_{\mathrm{n+1}}$ 中的元 $x_{n+1} = \sum_k \mu_k \tau_k$, 其中 $\tau_k\colon \Delta^{n+1} \to X$. x_{n+1} 应满足

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(x_{n+1}) &= \sum_k \mu_k \partial_{n+1}(\tau_k)\\ &= \sum_k \mu_k \sum_l (-1)^l \tau_k \circ F^l\\ &= b_n.\end{aligned}$$

称 $B_n(X)$ 为 n**-维边缘链**.

$H_n(X,R) = \ker\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{\mathrm{n+1}}$, 对 $z_n \in \ker\partial_n$, $[z_n] \in H_n(X,R)$ 称为 z_n 所代表的**同调类**.

这样, $[z_n] = [z_n']$ 指的是: 存在 $x_{n+1} \in S_{n+1}(X)$, 使得 $z_n - z_n' = \partial_{n+1}(x_{n+1}) \in B_n(X)$, 此时称闭链 z_n **同调**于 z_n'.

相对同调群

定义4.8. 设 $A \subset X$ 是拓扑空间 X 的子空间. 令

$$S_n(A) = \left\{\sum_j r_j\sigma_j | r_j \in R, \sigma_j\colon \Delta^n \to A \subset X\right\}.$$

易见, $S_n(A) \subset S_n(X)$. 定义商群

$$S_n(X,A) = S_n(X)/S_n(A).$$

那么, 注意到 $\partial_n\colon S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ 可以限制到 $S_n(A)$ (仍记为 ∂_n), 从而得到 $\partial_n\colon S_n(A) \to S_{n-1}(A)$. 这样 ∂_n 可导出同态 $\tilde{\partial}_n$

$$\tilde{\partial}_n\colon S_n(X)/S_n(A) = S_n(X,A) \to S_{n-1}(X,A),$$

它满足 $\tilde{\partial}_n\tilde{\partial}_{n+1} = 0$. 因而 $S(X,A) = \left\{S_n(X,A), \tilde{\partial}_n\right\}_{n\geq 0}$ 也是一个链复形. 称 $S_n(X,A)$ 为 n-维**相对链**(模). $\tilde{\partial}_n$ 称为相对于 A 的边缘同态. $H_n(S(X,A))$ 称为 X 的 R 系数的相对同调(模), 记为 $H_n(X,A,R)$. 当 $R = \mathbb{Z}$ 时, 简记为 $H_n(X,A)$.

思考. 下次课将计算单点集的链复形和同调群, 自己课后思考它们分别是什么?

5 奇异同调群的性质 I

回忆奇异链复形

$$S_n(X) = \sum_j r_j\sigma_j | r_j \in R, \sigma_j\colon \Delta^n \to X$$

以及边缘同态

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ F^i,$$

其中

$$\sigma \circ F^i\colon \Delta^{n-1} \xrightarrow{F^i} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X.$$

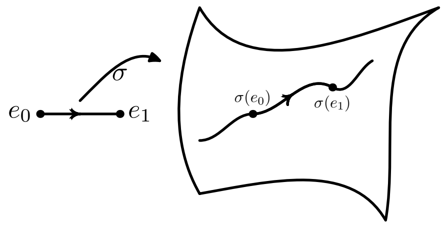
例15. 任何奇异链复形

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

的零维同调群 $H_0(X,R) = S_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$, 其中 $S_0(X)$ 的生成元是 $\sigma\colon\{e_0\} = \Delta^0 \to X$. 若将 σ 记为 $x = \sigma(e_0)$, 那么

$$S_0(X) = \left\{\sum_j r_j x_j | r_j \in R, x_j \in X\right\}.$$

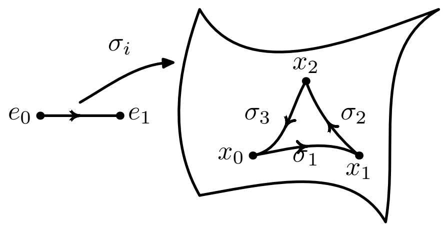
这样, 对任何 $[x] \in H_0(X,R)$ 有如下结论: 设 x_0, $x_1 \in X$, 而且存在 x_0 到 x_1 的道路 $\sigma\colon\Delta^1 \cong I = [0,1] \to X$, $\sigma(e_0) = x_0$, $\sigma(e_1) = x_1$. 那么 $\sigma \in S_1(X)$, 且 $\partial_1(\sigma) = \sigma \circ F^0 - \sigma \circ F^1 = x_1 - x_0 \in S_0(X,R)$, 这说明连个闭链之差是边缘. 从而 $[x_0] = [x_1] \in H_0(X,R)$, 而且 $r \cdot [x_0] = [r \cdot x_0]$.



于是, 如果拓扑空间 X 有 n 个道路连通分支, 记 $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, 其中 $\sqcup$ 表示**无交并**. 则 $H_0(X,R) = \oplus_{i=1}^n [x_i] \cong R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$, 即为 n 个 R 的直和. 其中 $x_i \in X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. $[x_i]$ 是 $H_0(X_i,R)$ 的生成元.

下面来看 $H_1(X,R)$. 首先, 按照定义 $H_1(X,R) = \ker\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2$.

对于1维奇异单形 $\sigma\colon\Delta^1 \to X$, $\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0)$. 现在, 若 σ 是闭路(环路), 则 $\partial_1(\sigma) = 0$. 即 $\sigma \in \ker\partial_1$. 于是对于闭路 σ, 有 $[\sigma] \in H_1(X,R)$. 但是, 一般地, 可能还有其它元. 例如 σ_i, $i = 1,2,3$ 如图中所示,

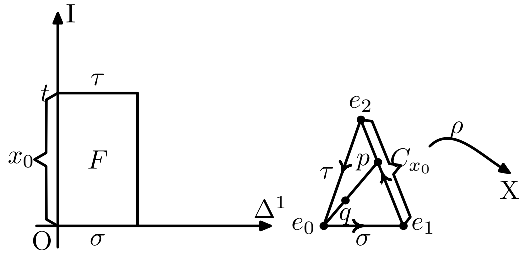


那么 $\partial_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_0 - x_2) = 0$. 这说明 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ 是闭链.

思考. 道路乘积 $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$ 是闭路, 从而是闭链. 它所在的同调类为 $[\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3]$, 而 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ 也是闭链, 它所在的同调类为 $[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]$. 试说明 $[\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3] = [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] \in H_1(X,R)$.

命题5.1. *设 $\sigma \simeq_p \tau$ 是两道路同伦的闭路. 作为基本群的元素, 我们有 $[\sigma] = [\tau] \in \pi_1(X,x_0)$. 更进一步地, 作为同调群 $H_1(X,R)$ 的元素, 我们也有 $[\sigma] = [\tau]$.*

证明: 设 F 是从 σ 到 τ 的伦移, $F\colon\Delta^1 \times I \to X$. 如下图所示, 图中 C_{x_0} 是一个常值道路.



令 $p=(1-t)e_1+te_2$，$q=(1-s)e_0+sp$, 其中 $s,t\in I=[0,1]$. 定义

$$\rho(q)=F(s,t)\in X,$$

则

$$\begin{aligned}\partial_2(\rho)&=\rho\circ F^0-\rho\circ F^1+\rho\circ F^2\\&=C_{x_0}-\tau+\sigma.\end{aligned}$$

构作 $\mu\colon\Delta^2\to X$，$\mu(q)=x_0$. 则

$$\begin{aligned}\partial_2(\mu)&=\mu\circ F^0-\mu\circ F^1+\mu\circ F^2\\&=C_{x_0}.\end{aligned}$$

从而，$\partial_2(\rho-\mu)=\sigma-\tau$. 即 σ，τ 相差一个边缘, 故 $[\sigma]=[\tau]\in H_1(X,R)$. □

定理5.2. 由于 X 中的闭路都是闭链, 从而可以定义映射

$$\begin{aligned}\chi\colon\pi_1(X,x_0)\ &\to H_1(X,\mathbb{Z})\\ \sigma\ &\mapsto\sigma,\end{aligned}$$

它是一个满同态. $\ker\chi=[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]=$ 所有的$[\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}]$ 生成的正规子群. 其中 σ, $\tau\in\pi_1(X,x_0)$.

从而, 由群的同态基本定理, 得到

$$H_1(X,\mathbb{Z})\cong\pi_1(X,x_0)/\ker\chi.$$

证明: 定理的证明较难. □

例16.

$$\begin{aligned}\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)&=F\{a,b\}\\H_1(S^1\vee S^1,x_0)&=F\{a,b\}/<aba^{-1}b^{-1}>\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例17. 单点空间的奇异同调群.

证明:

$$S_n(x_0)=\left\{\sum r\cdot C_{x_0}|C_{x_0}^n\colon\Delta^n\to x_0\right\}\cong R.$$

当 $n=2k$ 时，$\Delta^{n-1}\xrightarrow{F^i}\Delta^n\xrightarrow{C_{x_0}^n}x_0$.

$$\begin{aligned}\partial_{2k}\left(C_{x_0}^{2k}\right)&=C_{x_0}\circ F^0-C_{x_0}\circ F^1+\cdots+C_{x_0}\circ F^{2k}\\&=C_{x_0}^{2k-1}-C_{x_0}^{2k-1}+C_{x_0}^{2k-1}-\cdots+C_{x_0}^{2k-1}\\&=C_{x_0}^{2k-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{2k+1}\left(C_{x_0}^{2k+1}\right)&=C_{x_0}^{2k+1}\circ F^0-C_{x_0}^{2k+1}\circ F^1+\cdots-C_{x_0}^{2k+1}\circ F^{2k+1}\\&=0.\end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{2k+1}(x_0) \arrow[r, "\partial_{2k+1}"] \arrow[d, equal] & S_{2k}(x_0) \arrow[r, "\partial_{2k}"] \arrow[d, equal] & S_{2k-1}(x_0) \arrow[r, "\partial_{2k-1}"] \arrow[d, equal] & S_{2k-2}(x_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & S_1(x_0) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & S_0(x_0) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "0"] & R \arrow[r, "1"] & R \arrow[r, "0"] & R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "0"] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

于是,

$$
\ker \partial_{2k} = 0, \quad \mathrm{Im}\, \partial_{2k+1} = 0, \quad \mathrm{H_{2k}(x_0, R) = 0},
$$

$$
\ker \partial_{2k-1} = R, \quad \mathrm{Im}\, \partial_{2k} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{H_{2k-1}(x_0, R) = R/R = 0},
$$

$$
H_0(x_0, R) = R.
$$

故,

$$
H_n(x_0, R) = \begin{cases} R, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}
$$

□

例18. 若 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是 n 个离散点, 则它的同调群是

$$
H_n(X) = \begin{cases} \underbrace{R \oplus R \oplus \cdots \oplus R}_{n\text{个}}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}
$$

拓扑空间连续映射的诱导同态

奇异同调可看成一个函子:

拓扑空间 X: $\to H_n(X, R)$,

连续映射 $(f\colon X \to Y) \to (f_*\colon H_n(X, R) \to H_n(Y, R))$.

令 $\mathcal{T}$ 是拓扑空间的范畴, 如果 $f\colon X \to Y$ 是映射, 则对任何 $\sigma\colon \Delta^n \to X$, $f \circ \sigma\colon \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$ 是 Y 中的奇异单形.

对 $f \circ \sigma$ 作线性扩充得到同态

$$
\begin{aligned}
f_\#\colon S_n(X) &\to S_n(Y) \\
\sum r_j \sigma_j &\mapsto \sum r_j (f \circ \sigma_j),
\end{aligned}
$$

这个 $f_\#$ 是一个**链映射**导出同调群的同态:

$$
\begin{aligned}
f_*\colon H_n(X, R) &\to H_n(Y, R) \\
[\sum r_j \sigma_j] &\to [\sum r_j (f \circ \sigma_j)] \in H_n(Y, R).
\end{aligned}
$$

定义5.3. 映射导出的同态满足

1. 对 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$, 有

$$
(g \circ f)_* = g_* \circ f_*,
$$

即由下图交换.

$$
\begin{tikzcd}
H_n(X, R) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g \circ f)_*"'] & H_n(Y, R) \arrow[d, "g_*"] \\
& H_n(Z, R).
\end{tikzcd}
$$

2. $1\colon X\to X$ 导出单位同态

$$1_* = 1\colon H_n(X,R)\to H_n(X,R).$$

同调群的公理化定义

1950 年, Steenood 提出了公理化定义. H_n 是满足如下条件的函子

- 拓扑空间 $\mathbb{Z} \Longrightarrow$ 同调群 $H_n(\mathbb{Z},R)$;
- 映射 $f\colon X\to Y \Longrightarrow$ 群同态 $f_*\colon H_n(X,R)\to H_n(Y,R)$;
- 单点同态 $H_n(x_0) \Longrightarrow H_n(x_0,R)=\begin{cases} R, & n=0,\\ 0, & n>0.\end{cases}$

理论上讲, 所有的单纯、奇异、Dric 上同调. 又若还满足同伦不变、正合序列、切除定理, 则这就是奇异同调.

奇异同调和相对同调的统一处理

设 $f\colon (X,A)\to (Y,B)$ 是一个映射, 且 $f(A)\subset B$, 则

$$f_\#\colon S_n(X)\to S_n(Y),$$
$$f_\#\colon S_n(A)\to S_n(B).$$

f 导出链映射 $f_\#\colon S_n(X,A)\to S_n(Y,B)$. 从而有同调群的同态 $f_\#\colon H_n(X,A,R)\to H_n(Y,B,R)$. 取 $A=B=\emptyset$, 则相对同调群就是同调群, 即 $H_n(X,\emptyset,R)=H_n(X,R)$.

定理5.4. 如果 $f\overset{F}{\simeq} g\colon (X,A)\to(Y,B)$ 且 $F(A\times I)\subset B$, 则 $f_*=g_*\colon H_n(X,A,R)\to H_n(Y,B,R)$.

注记. 一般地,

$$f_\#(\sum f_j\sigma_j)=\sum r_j(f\circ\sigma_j)\neq g_\#(\sum r_j\sigma_j)=\sum r_j(g\circ\sigma_j).$$

但对 $[z_n]\in H_n(X,A,R)$, 则

$$\left[\sum f_j(f\circ\sigma_j)\right]=f_*([z_n])=g_*([z_n])=\left[\sum r_j(g\circ\sigma_j)\right].$$

证明: 基本思想是, 有如下的同伦链

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_*"', "g_*"] & S_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_*"', "g_*"] \arrow[dl, "D_n"'] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"', "g_*"] \arrow[dl, "D_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & S_1(X,A) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_*"', "g_*"] & S_0(X,A) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_*"', "g_*"] \arrow[dl, "D_0"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & S_n(Y,B) \arrow[r, "\partial'_n"'] & S_{n-1}(Y,B) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_1(Y,B) \arrow[r, "\partial'_1"'] & S_0(Y,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

F 导出 $D_n\colon S_n(X,A)\to S_{n+1}(Y,B)$, 满足

$$f_\# - g_\# = \partial'_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n,$$

$D=\{D_n\}_{n\geq 0}$ 称为 $f_\#$ 到 $g_\#$ 的链同伦. □

6　奇异同调群的性质 II

回顾, 上节课的内容.

对任何 $[z_n] \in H_n(X, A, R)$, 若满足 $\partial_n z_n = 0$, 则

$$\begin{aligned} f_\#(z_n) - g_\#(z_n) &= \partial'_{n+1} D_n(z_n) + D_{n-1}\partial_n(z_n) \\ &= \partial'_{n+1} D_n(z_n), \quad (\partial_n(z_n) = 0). \end{aligned}$$

从而 $f_\#(z_n)$ 与 $g_\#(z_n)$ 相差一个边沿. 故属于同一个同调类.

映射 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 导出同态 $f_*\colon H_n(X, A, R) \to H_n(Y, B, R)$ 且若 $f \overset{F}{\simeq} g\colon (X, A) \to (Y, B)$ 同伦 (这里要求 $F(A, t) \subset B,\ \forall t \in I = [0, 1]$.) 则 $f_* = g_*\colon H_n(X, A, R) \to H_n(Y, B, R)$. 从而, 两个空间是同伦等价的, 那么它们的各维同调群都同构.

正合序列

定义6.1. 一个模的序列

$$\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \to \cdots,$$

称为在 G_n 处是**正合的**, 如果 $\mathrm{Im\, f_{n-1}} = \mathrm{ker\, f_n}$. 若这个序列在每个 G_n 处都正合, 则称该序列是**正合的**.

例19. $S(x_0)$ 不正合. 但是

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots \longrightarrow & S_{2k+1}(x_0) & \longrightarrow & S_{2k}(x_0) & \longrightarrow & S_{2k-1}(x_0) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S_1(x_0) & \longrightarrow & S_0(x_0) & \longrightarrow & R & \longrightarrow 0 \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\ \cdots \longrightarrow & R & \xrightarrow{0} & R & \xrightarrow{1} & R & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & R & \xrightarrow{0} & R & \xrightarrow{1} & R & \longrightarrow 0 \end{array}$$

是正合序列.

例20. 序列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0,$$

正合是指

1° f 是单同态;

2° $\mathrm{Im\, f} = \mathrm{ker\, g}$;

3° g 是满同态.

这样的序列称为**短正合序列**.

对任何一个短正合序列, 可以通过 C, E 来确定 D. 这中方法称为**群扩张**.

例如, 对短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0,$$

$D = \mathbb{Z}/6$.

又如, 对短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

D 为 $\mathbb{Z}/4$ 或者 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

定理6.2. 对任何拓扑空间偶 (X,A), 都有同调群的***长正合序列***

$$\cdots \longrightarrow H_n(A,R) \xrightarrow{i} H_n(X,R) \xrightarrow{j} H_n(X,A,R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,R) \to \cdots$$

$$H_1(X,R) \xrightarrow{j} H_1(X,A,R) \to H_0(A,R) \longrightarrow H_0(X,R) \longrightarrow H_0(X,A,R) \to 0.$$

注记. • 证明很长, 是一个可写而不可读的证明. 证明的思路是: 对于相对奇异链复形 $S_n(X,A) = S_n(X)/S_n(A)$, 则有短正合序列

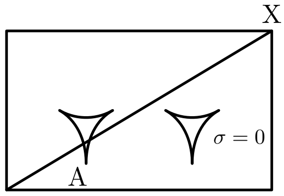
$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_n"] & S_n(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_n"] & S_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

将这个序列记为

$$0 \longrightarrow S(A) \longrightarrow S(X) \longrightarrow S(X,A) \longrightarrow 0.$$

它是链复形的短正合序列, 由它可导出同调群的长正合序列(同调代数里的经典方法–**追图法**).

- $i\colon A \to X$ 内射导出的同态.
- $j\colon (X,\emptyset) \to (X,A)$ 导出同态 $j\colon H_n(X,\emptyset,R) \to H_n(X,A,R)$.
- $\partial\colon H_n(X,A,R) \to H_{n-1}(A,R)$. 设 $H_n(X,A,R)$ 中的同调类是 $[z_n]$, 即 $[z_n] \in S_n(X)/S_n(A)$. 那么 $z_n = \sum r_j\sigma_j$. 当 $\sigma_j(\Delta^n) \subset A$ 时, 仍为 $\sigma_j = 0 \mod S_n(A)$.

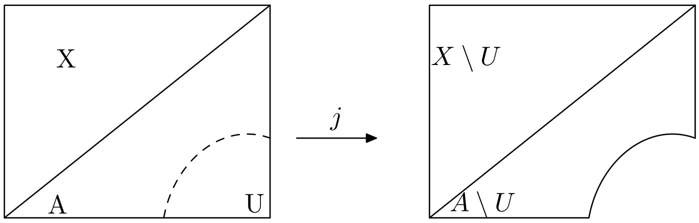


$$S_n(X)/S_{n-1}(A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A).$$

其中 $\partial_n(z_n) = \sum a_k\tau_k,\ \tau_k(\Delta^{n-1}) \subset A$.

$\sum a_k\tau_k \in Z_{n-1}(A) = \ker\partial_{n-1} \subset S_{n-1}(A)$, 它就是边缘同态的像, 即 $\partial[z_n] = [\sum a_k\tau_k] \in H_{n-1}(A,R)$.

定理6.3 (切除定理)**.** 设 U 是 X 的一个子集, U 的闭包 $\overline{U}$ 包含在 A 的内部, 即 $\overline{U} \subset A^\circ$. 则内射 $j\colon (X\backslash U, A\backslash U) \to (X,A)$ 导出的同调群的同态 $j\colon H_n(X\backslash U, A\backslash U, R) \to H_n(X,A,R)$ 是同构.



注记. • 证明的基本思路是: 重心重分、它是链同伦等价、 j 是既单又满.

• 上同调的切除定理也对, 但证明要用到泛系数定理.

奇异同调群的公理化定义

奇异同调群是一列满足如下要求的对应

• 将拓扑空间偶 (X, A) 对应于 $H_n(X, A, R)$ (奇异同调群或者等价的说, R-模);

• 将映射 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 对应于 $f_*\colon H_n(X, A, R) \to H_n(Y, B, R)$.

此外,

i) 对 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, $g\colon (X, A) \to (Z, C)$, 有

$$(g \circ f)_* = g_* \circ g_*;$$

ii) $1\colon (X, A) \to (X, A)$ 导出的同态 $1_*\colon H_n(X, A, R) \to H_n(X, A, R)$ 是恒同映射;

iii)

$$H_n(x_0, R) = \begin{cases} R, & n = 0 \\ 0, & n > 0; \end{cases}$$

iv) 若 $f \overset{F}{\simeq} g\colon (X, A) \to (Y, B)$ 是同伦, 则 $f_* = g_*\colon H_n(X, A, R) \to H_n(Y, B, R)$;

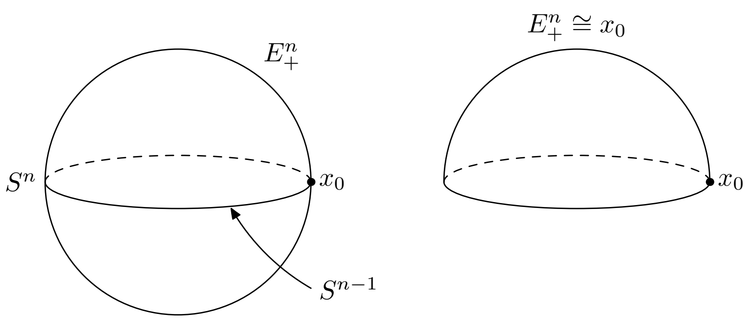
v) 有长正合序列;

vi) 满足切除定理.

任何满足如上定义的对应(正式的术语是**函子**) $h_n\colon \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ 和奇异同调群是同构的. 上面的定义也称为同调群的公理化定义.

同调群的计算

例21. 记 E^n_+ 为球面上的上半球.



计算 E_+^n 的同调群.

证明: 注意到 $E_+^n \simeq x_0$, 由同伦不变性, 有

$$H_n(E_+^n, R) = H_n(x_0, R) = \begin{cases} R, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

且 $H_0(E_+^n, R)$ 的生成元是 $[x_0]$.

对于 (S^n, E_+^n) 有正合序列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_m(E_+^n, R) \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & H_m(S^n, R) \arrow[r, "j"] & H_m(S^n, E_+^n, R) \arrow[r, "\partial"] & H_{m-1}(E_+^n, R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & H_1(E_+^n, R) \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & H_1(S^n, R) \arrow[r, "j"] & H_1(S^n, E_+^n, R) \arrow[r, "\partial"] & H_0(E_+^n, R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
& 0 & & & R & \\
& H_0(S^n, R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(S^n, E_+^n, R) \arrow[r] & 0 & & \\
& R & & & &
\end{tikzcd}$$

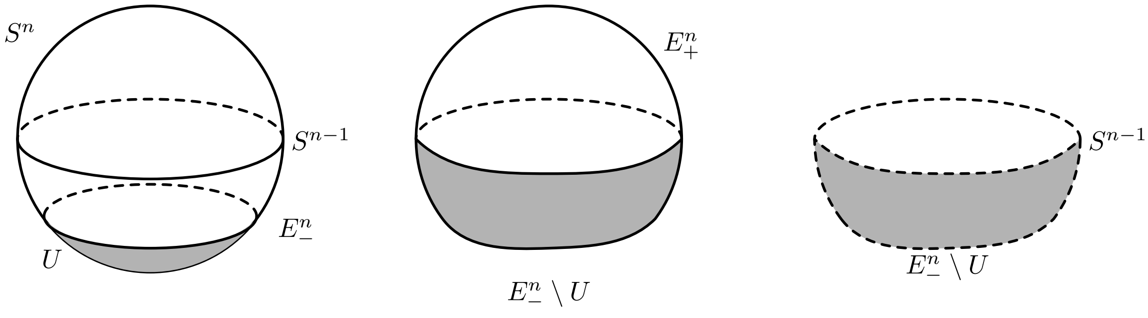
由正合序列知,

i) 对 $n > 1$, $H_m(S^n, R) \xrightarrow{\simeq} H_m(S^n, E_+^n, R)$. 注意到 $H_0(E_+^n, R)$ 和 $H_0(S^n, R)$ 之生成元都是 $[x_0]$. 从而它们之间的同态是恒等映射 1. 故 ∂ 是零同态. 由此知道 j 是同构, 即 $H_1(S^n, R) \xrightarrow{\cong} H_0(S^n, E_+^n, R)$.

ii) $H_0(S^n, E_+^1, R) = 0$, 高维的同调群和球面的同调群一样都是0.

□

例22. 记 E_-^n 为球面 S^n 的下半球面, U 是下半球面中的一个开邻域. 注意到 $\overline{U} \subset E_-^n{}^\circ$.



从而由切除定理, 有同构

$$(S^n, E_-^n) \cong (S^n \setminus U, E_-^n \setminus U),$$

$$j\colon H_m(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U, R) \xrightarrow{\cong} H_m(S^n, E_-^n, R) \cong H_m(S^n, E_+^n, R) = \begin{cases} H_m(S^n, R), & m \geq 1 \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

构作映射 $f\colon (S^n \setminus U, E_-^n \setminus U) \to (E_+^n, S^{n-1})$ 是同伦等价. 因此有同构

$$H_m(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_m(E_+^n, S^{n-1}).$$

下设 $n\geq 1$.

(E^n_+,S^{n-1}) 的同调群的长正合序列是

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H_m(S^{n-1},R) \arrow[r] & H_m(E^n_+,R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_m(E^n_+,S^{n-1}) \arrow[r] & H_{m-1}(S^{n-1},R) \arrow[r] & H_{m-1}(E^n_+,R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
 & & 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H_2(E^n_+,R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_2(E^n_+,S^{n-1},R) \arrow[r, "\partial"] & H_1(S^{n-1},R) \arrow[r] & H_1(E^n_+,R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(E^n_+,S^{n-1},R) \arrow[r] & {} \\
 & 0 & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_0(S^{n-1},R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(E^n_+,R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(E^n_+,S^{n-1},R) \arrow[r] & 0 \\
R & R & &
\end{tikzcd}$$

从而

$$H_m(E^n_+,S^{n-1})\cong H_{m-1}(S^{n-1},R),\quad m\geq 2.$$

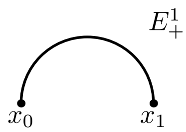
当 $n>1$ 时,

$$H_0(S^{n-1},R)\xrightarrow{\mathrm{id}}H_0(E^n_+,R)\Longrightarrow H_0(E^n_+,S^{n-1},R)=0\Longrightarrow H_1(E^n_+,S^{n-1},R)=0.$$

当 $n=1$ 时,

$$\begin{tikzcd}
H_0(S^{n-1},R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(E^n_+,R) \arrow[d, equal] \\
{[x_0],[x_1]\ \text{生成}} \arrow[r, "l"] & {[x_0]\ \text{生成}}
\end{tikzcd}$$

其中 l 表示将 $[x_0]$, $[x_1]$ 都映射到 $[x_0]$.



$S^1=\{x_0,x_1\}$

因 $[x_1]=x_0$ 在 E^n_+ 中成立, 从而

$$H_0(E^n_+,S^{n-1}_+,R)=0.$$

因映射 l 的核是 R, 其生成元是 $[x_0]-[x_1]$.

注记. 结论:

i)

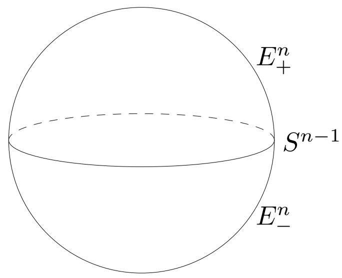
$$H_m(E^n_+,S^{n-1},R)\cong H_m(S^n,E^n_+,R)\,(\cong H_m(S^n,R))=\begin{cases} H_{m-1}(S^{n-1},R), & m\geq 2,\\ R, & n=1,m=1,\\ 0, & n>1,m=1,\\ 0, & m=0.\end{cases}$$

思考. 自己推导 S^n 的同调群是

$$H_m(S^n,R)=\begin{cases}R, & m=0,\\ R, & m=m,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

7 实射影空间和球面同调群的计算

回顾上节课的计算.



当 $m>0$, $n>0$ 时,

$$H_m(S^n,R) \underset{\text{长正合序列}}{\cong} H_m(S^n,E_-^n,R) \underset{\text{切除定理}}{\cong} H_m(E_+^n,S^{n-1},R)$$

利用最后一个群的长正合序列, 我们可计算出

i) 当 $n\geq 1$ 时, $H(E_+^n,S^{n-1},R)=0$, $H_m(E_+^n,S^{n-1},R)\cong H_{m-1}(S^{n-1},R)$, $m>1$.

ii) 当 $n=1$ 时, $H_1(E_+^1,S^0,R)\cong R$.

iii) 当 $n>1$ 时, $H_m(E_+^1,S^0,R)\cong H_{m-1}(S^0,R)=0$, $m>1$.

下面我来计算球面的同调群

i) 圆 S^1: 由 S^1 道路连通, 故 $H_0(S^1,R)=R$. $H_1(S^1,R)=R$ (用前面的结论). $H_m(S^1,R)=0$, $m>1$.

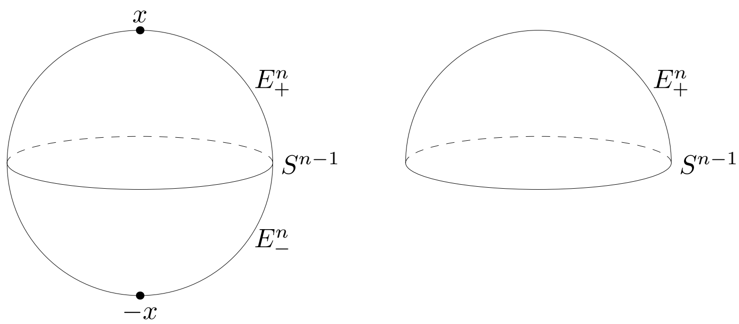
ii) S^2 的同调群: $H_0(S^2,R)=R$, $H_1(S^2,R)=0$, $H_2(S^2,R)\cong H_1(S^1,R)=R$. $H_m(S^2,R)\cong H_{m-1}(S^1,R)\cong 0$, $m>2$.

iii) S^n 的同调群: 用归纳法可得, $H_0(S^n,R)=R$, $H_1(S^n,R)=0$, $H_m(S^n,R)\cong H_{m-1}(S^{n-1},R)=0$, $m=2,\dots,n-1$. $H_n(S^n,R)\cong H_{n-1}(S^{n-1},R)=R$. $H_m(S^n,R)\cong H_{m-1}(S^{n-1},R)=0$, $m>n$.

这样, 我们得到

$$H_m(S^n,R)=\begin{cases}R, & m=0,n,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例23. 令 $\mathbb{R}P^n=S^n/\sim$, 其中 S^n 是 n-维标准球面, 且 $x\sim -x$.

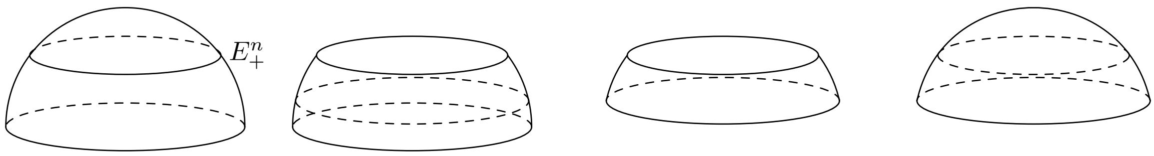


注意到 $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$, 对于 $x \in S^{n-1}$, 有 $x \sim -x$. 这样 $\mathbb{R}P^n$ 可看成 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 和上半球 E_+^n 的无交并. 即, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f E_+^n$. 其中 f 表示将 E_+^n 边界上的点 $x \in S^{n-1}$ 和 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 中的点 $[x]$ 粘到一起. 这样一直下去, 我们可以得到

$$\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^1 \cup E_+^2 \cup E_+^3 \cup \cdots \cup E_+^n,$$

称为 $\mathbb{R}P^n$ 的 CW 复形结构.

下面来计算 $\mathbb{R}P^n$ 的基本群.



$\mathbb{R}P^{n-1}$ $\qquad$ $U \cong \mathbb{R}P^{n-1}$ $\qquad$ $U \cap V \cong S^{n-1} \times (a, b)$ $\qquad$ $V \simeq x_1$

- 当 $n-1>1$ 时,

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / < i_1([\sigma] \cdot i_2([\sigma])^{-1}) >,$$

其中 $\pi_1(V, x_0) \cong \{e\}$. 而且, 当 $n-1>1$ 时, $\sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0) = \pi_1(S^{n-1} \times (a,b), x_0) = \{e\}$.

从而,

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}, x_0) \cong \cdots \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0).$$

注意到,

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^1 \cup_f E_+^2, \quad \mathbb{R}P^1 = S^1/\sim \cong S^1.$$

将 E_+^2 的边界 S^1 粘在 $\mathbb{R}P^1 \cong S^1/\sim$ 中的映射 $f\colon S^1 \to S^1$ 代表 $\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_0) = 2$ (即在粘贴的过程中, 绕 $\mathbb{R}P^1$ 的等价类 $[x]$ 转两圈). 这样, 我们得到

$$\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_0) = \pi_1(\mathbb{R}P^1 \cup_2 E_+^2, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^1, x_0)/ < 2 >= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2.$$

- 这样, 我们又得到

$$H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

因为 $\mathbb{R}P^n$ 道路连通.

而

$$H\colon \pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \to H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}),$$

是满射, 而且其核为交换化子. 于是

$$H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)/[\cdot,\cdot] = \mathbb{Z}/2,$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)$ 的交换化子.

- 利用正合序列、同伦不变、切除定理可以导出 $\mathbb{R}P^n$ 之一般维数的同调群. 尽管典型的方法是利用 Mayer-Vietor 序列给出的.

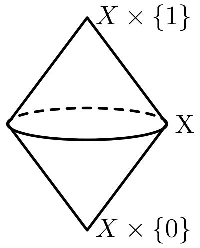
课程考试

下列题目中任选两道作答, 答对一题即可.

1. 证明2维欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 不同胚于3维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$.
2. 2维实射影空间 $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$, 其中 $x \sim -x$, $x \in S^2$. 试构造拓扑空间 X, 使得 $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \times X, x_0) = \mathbb{Z}/6$.
3. 令 $X = S^1 \times D^2$ 为实心圆环, 其中 D^2 为单位圆盘. 若 $A = S^1 \times S^1 \subset X$, 试证明 A 不是 X 的收缩核.
4. D^2 为单位圆盘, $A = \{x_1, x_2\} \subset D^2$. 求 (D^2, A) 的各维同调群 $H_n(D^2, A, \mathbb{Z})$.
5. 设 X 是拓扑空间, 记 ΣX 为 X 的双锥. 即将 $X \times I$ 中的 $X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$ 分别粘合对应点而得到

$$\Sigma X = X \times I/\sim, \quad (x_1, 0) \sim (x_2, 0), (x_1, 1) \sim (x_2, 1), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

试证明, 对任意的 $n > 1$. $H_n(\Sigma X, R) \cong H_{n-1}(X, R)$.



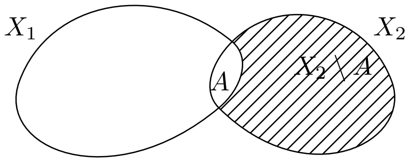
8 Mayer-Vietoris 序列

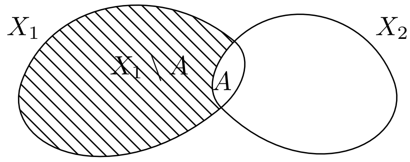
Mayer-Vietoris 是类似于 Van-Kampen 定理, 通过将基本空间分解来计算同调群的方法.

定义8.1. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间, $X = X_1 \cup X_2$. 记 $X_1 \cap X_2 = A$, 若内射

$$\begin{aligned} k_1 \colon H_n(X_1, A) &\to H_n(X, X_2), \\ k_2 \colon H_n(X_2, A) &\to H_n(X, X_1), \end{aligned}$$

都是切除同构的(即导出的同调群同构). 则称 (X, X_1, X_2) 为一个**正合三元组**.





关于 Mayer-Vietoris 序列有两种引入办法.

法1.构作链复形 $S(X_1)+S(X_2)$ 如下(其上有边缘同态):

$$
\begin{aligned}
S_n(X_1)+S_n(X_2) &= \big\{r_j\sigma_j | r_j \in R, \sigma_j\colon \Delta^n \to X_1 \text{ 或者 } \sigma_j\colon \Delta^n \to X_2\big\} \\
&\subset S_n(X). \quad \text{(即要求奇异单形的像完全在 } X_1 \text{ 中, 或者完全在 } X_2 \text{ 中)}
\end{aligned}
$$

则有如下

引理8.2. *若 (X, X_1, X_2) 是正合三元组, 则*

$$i\colon S(X_1)+S(X_2) \to S(X), \quad \text{(链映射)}$$

它导出同调群的同构.

下面来构造链复形的短正合序列.

$$
\begin{array}{rcl}
j\colon S(X_1)\oplus S(X_2) & \to & S(X_1)+S(X_2) \\
(x_1, x_2) & \mapsto & x_1 - x_2,
\end{array}
$$

它是链复形的满同态, 而且 $\ker j = S(X_1 \cap X_2)$. 其中 $S(X_1)\oplus S(X_2)$ 中的元素是 $S_n(X_1)\oplus S_n(X_2) = \{(x_1, x_2) | x_1 \in S_n(X_1), x_2 \in S_n(X_2)\}$.

从而有链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{(i_1, i_2)} S(X_1)\oplus S(X_2) \xrightarrow{j_1 - j_2} S(X_1)+S(X_2) \longrightarrow 0.$$

$$x \longmapsto (x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 - x_2)$$

它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X_1)\oplus H_n(X_2) \cong H_n(S(X_1)\oplus S(X_2)) \to H_n(S(X_1)+S(X_2)) \cong H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

这个序列称为 Mayer-Vietoris 序列.

注记. 这个方法的缺点是连续同态 ∂ 不好描述, 而优点是可以推广到 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ 的情形. 即构造

$$S(X_1)+S(X_2)+\cdots+S(X_n) \to S(X),$$

其中 $S(X_1)+S(X_2)+\cdots+S(X_n) = \{\sum r_j\sigma_j | r_j \in R, \sigma_j\colon \Delta^n \to X_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$. 然后类似的作下去..., 得到的正合序列称为 **Mayer-Vietoris 谱序列**. 它在代数几何中很有用.

法2. 有正合序列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_1) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_1,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "i"'] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X_2) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,X_2) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "i^{-1}\text{:切除同构}"'] & H_{n-1}(X_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

提取一条链

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(X_1,A) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,X_2) \arrow[u, "i^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

记 $\tilde{\partial} = i^{-1} \circ j$, 则得如下

定理8.3. 对正合三元组 (X, X_1, X_2) 有同调群的长正合序列

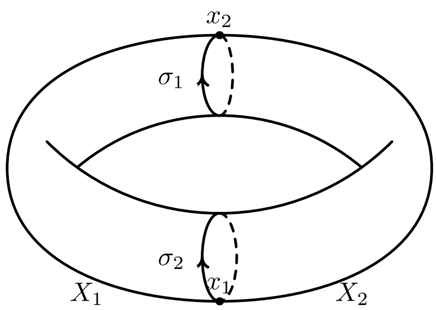
$$\begin{array}{c}
\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{j_1 - j_2} H_n(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \\
[x] \longmapsto ([x],[x]) \\
([z_1],[z_2]) \longmapsto [z_1]-[z_2]
\end{array}$$

称为 *Mayer-Vietoris* 序列.

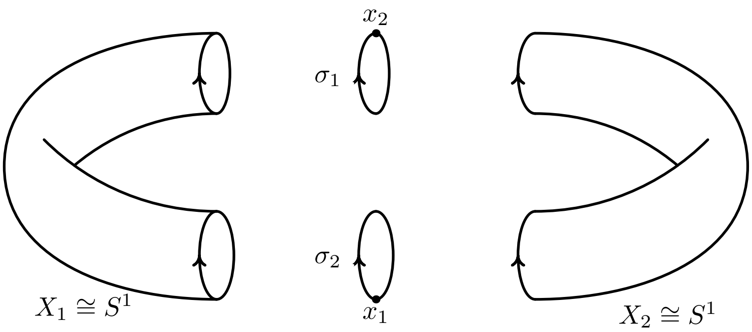
注记. 这个定理的基本作用是想通过 $H_n(A)$ 以及 $H_n(X_1)$ 和 $H_n(X_2)$ 计算出 $H_n(X)$.

证明: 将刚才构作的长正合序列拼接, 称为 Borratt-Whitehead 引理. □

例24. 求环面 $T = S^1 \times S^1$ 的各维同调群.



在这里, 我们将圆环沿纵向切割(如图), 自己讨论沿横线切割的情形.



自己验证 (X, X_1, X_2) 是一个三元组 (切割的时候少切一部分, 用同伦收缩). 我们有如下的正合序列

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_2(X_1)\oplus H_2(X_2) & \xrightarrow{j_1-j_2} & H_2(T) & \xrightarrow{\tilde\partial} & H_1(A) & \xrightarrow{(i_1,i_2)} & H_1(X_1)\oplus H_1(X_2) & \xrightarrow{j_1-j_2} \\
& \| & & & & \| & & \| & \\
& 0 & & & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H_1(T) & \xrightarrow{\tilde\partial} & H_0(A) & \xrightarrow{(i_1,i_2)} & H_0(X_1)\oplus H_0(X_2) & \xrightarrow{j_1-j_2} & H_0(T) & \longrightarrow & 0 \\
& & \| & & \| & & \| & & \\
& & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & &
\end{array}
$$

- $H_0(T)=\mathbb{Z}$, 其生成元是 $[x_1]=[x_2]=[x]$, 对任意的 $x\in T$.

- $H_0(X_1)=\mathbb{Z}$, 其生成元是 $[x_1]=[x_2]$. $H_0(X_2)=\mathbb{Z}$, 其生成元是 $[x_1]=[x_2]$. $H_0(A)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 生成元是 $[x_1]$ 和 $[x_2]$.

  这样,

$$
\begin{array}{rcl}
(i_1,i_2)\colon H_0(A) & \to & H_0(X_1)\oplus H_0(X_2) \\
{[x_1]} & \mapsto & ([x_1],[x_1]) \\
{[x_2]} & \mapsto & ([x_2],[x_2])
\end{array}
$$

  由在 X_1 中, x_1,x_2 可道路相连, X_2 中 x_1,x_2 也可道路相连. 故 $([x_2,x_1])=([x_1],[x_1])$, $\ker(i_1,i_2)\cong\mathbb{Z}$ 由 $[x_2]-[x_1]\in H_0(A)$ 生成. 由正合性, $\mathrm{Im}\,\tilde\partial=\ker(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)\cong\mathbb{Z}$ 由 $H_0(A)$ 中 $[x_2]-[x_1]$ 生成. 即存在 $[z_1]\in H_1(T)$, 使 $\tilde\partial(z_1)=[x_2]-[x_1]=[x_1-x_1]$.

  事实上, 因 $\partial_1(\tau_0+\tau_1+\tau_2)=0\Rightarrow\ z_1=\tau_0+\tau_1+\tau_2\in H_1(T)$ 且

$$
\begin{array}{ccc}
 & H_1(X_1,A) & \xrightarrow{\partial} H_0(A) \\
 & \downarrow & \\
H_1(T) \longrightarrow & H_1(T,X_2) &
\end{array}
$$

$$
[\tau_0+\tau_1+\tau_2]\longrightarrow[\tau_1] \qquad \text{因 } \tau_0,\tau_2 \text{ 都在 } X_2 \text{ 中.}
$$

  由 $\partial_1(\tau_1)=x_2-x_1\in SO(A)$, 故 $\partial([\tau_1])=[x_2-x_1]$.

  于是有, 在 $H_1(T)$ 中有 $[\tau_0+\tau_1+\tau_2]$ 满足 $\tilde\partial([\tau_0+\tau_1+\tau_2])=[x_2-x_1]$ 生成 $\ker(i_1,i_2)$.

- 讨论

$$
\begin{array}{cccc}
 & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \\
 & \shortparallel & & \shortparallel \\
(i_1,i_2)\colon & H_1(A) & \to & H_1(X_1)\oplus H_1(X_2) \\
 & [\sigma] & \mapsto & ([\sigma_i],[\sigma_i]) \quad i=1,2.
\end{array}
$$

  $H_1(A)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 之生成元是 $[\sigma_1],[\sigma_2]$. $H_1(X_1)\cong\mathbb{Z}$ 生成元是 $[\sigma_1]=[\sigma_2]$. $H_1(X_2)\cong\mathbb{Z}$ 生成元是 $[\sigma_1]=[\sigma_2]$.

  在 X_1,X_2 之同调群, 有 $[\sigma_1]=[\sigma_2]$, 即 $([\sigma_1],[\sigma_1])=([\sigma_2],[\sigma_2])$. 故 $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)\cong\mathbb{Z}$ 由 $([\sigma_1],[\sigma_1])$ 生成, $\ker(i_1,i_2)\cong\mathbb{Z}$ 由 $[\sigma_2]-[\sigma_1]$ 生成. 于是 $H_2(T)\cong\mathbb{Z}\cong\mathrm{Im}\,\tilde\partial=\ker(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)$.

- 下面来计算 j_1-j_2.

  首先由正合性, $\ker(j_1-j_2)=\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)\cong\mathbb{Z}$, 它由 $([\sigma_1],[\sigma_1])$ 生成. 故同态像 $\mathrm{Im}\,(\mathrm{j}_1-\mathrm{j}_2)\cong\mathrm{H}_1(\mathrm{X}_1)\oplus\mathrm{H}_1(\mathrm{X}_2)/\ker(\mathrm{j}_1-\mathrm{j}_2)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ 由 $([\sigma_1],0)$ 生成.

直和 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 的生成元是 $(k_1([\sigma_1]), k_2([\sigma_1]))$, $\ker(j_1-j_2)$ 的生成元是 $(k[\sigma_1], [\sigma_1])$.

现在, 有正合序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\,(\mathrm{j}_1-\mathrm{j}_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(T) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\text{must be}"] & \mathrm{Im}\,\tilde{\partial} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

这样 $H_1(T)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

注记. $H_1(T)$ 由 $[\tau_0+\tau_1+\tau_2]$ (横向一周)和 $\mathrm{Im}\,(\mathrm{j}_1-\mathrm{j}_2)=[\sigma_1]$ 生成(纵向一周).

思考. 1) 试求 $H_2(T)$ 的同态 $\tilde{\partial}$ 之核的原像.

2) 计算两个环面的联通和.

注记. 最后, 在学习同调论的过程中, 一开始不必搞懂证明, 会用就行.