2007,**27A**(2):309–313

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

线性过程的强逼近 *

[1,2] 陆传荣 [1] 邱瑾
([1] 浙江财经学院数学与统计学院 杭州 310018; [2] 浙江大学数学系 杭州 310028)

摘要：该文对由独立同分布随机变量序列所生成的线性过程建立了泛函重对数律和用 Wiener 过程对线性过程的强逼近结果.

关键词：线性过程；强逼近； Wiener 过程.

MR(2000) 主题分类：60F15; 60G15; 60F17 **中图分类号**: O211.4 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2007)02-309-05

1 引言和结果

设 $\{\varepsilon_i, i\geq 1\}$ 是独立同分布随机变量序列， $E\varepsilon_1=0, E\varepsilon_1^2=1$. 假设

$$X_t=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i} \tag{1.1}$$

是由 $\{\varepsilon_i\}$ 生成的线性过程，其中

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty, \qquad A=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\neq 0. \tag{1.2}$$

线性过程是时间序列分析中特别重要的一类序列，它们出现在各种不同的场合中，且被非常广泛地应用于计量经济，工程技术等领域，至今已有大量文献从事于线性过程的研究.

Philipps 和 Solo[6], Wang 等 [7] 已证明线性过程服从中心极限定理，弱收敛，强大数定律和重对数律. 在本文中，对形如 (1.1) 式的线性过程 $\{X_n\}$ 我们建立了泛函重对数律和强逼近结果.

记 $\sigma_X^2 =: A^2\sigma_\varepsilon^2$ 并设

$$Z_n(t)=\begin{cases}0, & t=0;\\ \sum\limits_{j=1}^{k}X_j/\sigma_X\sqrt{2n\log\log n}, & t=k/n,\quad k=1,\cdots,n,\\ \text{线性}, & (k-1)/n\leq t\leq k/n.\end{cases} \tag{1.3}$$

收稿日期: 2005-10-08; 修订日期: 2006-04-06
E-mail: crlu@hzcnc.com; zjqj@hzcnc.com
* 基金项目：国家自然科学基金 (10471126, 10371109) 、浙江省自然科学基金 (101016) 和浙江省哲学社会科学规划常规性课题 (06CGYJ21YBQ) 资助

用 **K** 记 [0, 1] 上绝对连续且满足 $\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\le 1$ 的函数 $f(x)$ 全体. 在本文中我们证明了下列定理.

定理 1.1 设 $\{\varepsilon_i,-\infty<i<\infty\}$ 是独立同分布随机变量序列, $E\varepsilon_1=0,E\varepsilon_1^2=1$. 若线性过程 $\{X_n,n\ge 1\}$ 满足下列条件

(i) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}j|a_j|<\infty$,

则 $\{Z_n(t),0\le t\le 1,n\ge 3\}$ 概率为 1 地相对紧且极限点集是 **K**.

定理 1.2 设 $\{\varepsilon_i\},\{X_t\}$ 如上, 若满足

(i) 设 $E|\varepsilon_1|^p<\infty,p>2$, $E\varepsilon_1^2=1$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}j|a_j|<\infty$, 则

$$\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)=o(n^{1/p})\quad \text{a.s..}\tag{1.4}$$

(ii) 设对 $|t|<t_0$, $E\mathrm{e}^{t\varepsilon_1}<\infty$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}j|a_j|<\infty$,

则我们有

$$\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)=O(\log n)\quad \text{a.s..}\tag{1.5}$$

2 定理的证明

为证明定理, 我们需要下列引理.

引理 2.1 (Phillips 和 Solo[6]) 设 $\tilde a_i=\sum\limits_{l=i+1}^{\infty}a_l$, 若 $p\ge 1$, 则

$$\sum_{j=1}^{\infty}j^p|a_j|^p<\infty\quad\Longrightarrow\quad\sum_{j=0}^{\infty}|\tilde a_j|^p<\infty,\quad |\sum_{j=1}^{\infty}a_j|<\infty.$$

引理 2.2 (白志东[1]) 设 $\{e_n,n\ge 1\}$ 独立同分布随机变量序列. 则对任何实数 $\{a_i,i\ge 1\}$ 它满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=O(n^{-2/r}),r>0$, 使得

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\longrightarrow 0\qquad \text{a.s..}$$

当且仅当 $E|e_1|^r<\infty$ 且 $Ee_1=0$ 若 $r\ge 2$.

定理 1.1 的证明 设

$$Y_n(t)=\begin{cases}0, & t=0;\\ \sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_i/\sigma_\varepsilon\sqrt{2n\log\log n}, & t=k/n,\quad k=1,\cdots,n;\\ \text{线性}, & (k-1)/n\le t\le k/n,k=1,\cdots,n.\end{cases}\tag{2.1}$$

$$V_n(t)=\begin{cases}0, & t=0;\\ \{\tilde{\varepsilon_0}-\tilde{\varepsilon_k}\}/\sigma_\varepsilon\sqrt{2n\log\log n}, & t=k/n,\quad k=1,\cdots,n;\\ \text{线性}, & (k-1)/n\le t\le k/n,k=1,\cdots,n.\end{cases}\tag{2.2}$$

由于

$$\sum_{t=1}^{k} X_t = A\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_k, \tag{2.3}$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_j = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \varepsilon_{j-i}$, $\tilde{a}_i = \sum\limits_{l=i+1}^{\infty} a_l$, 我们有

$$Z_n(t) = Y_n(t) + A^{-1}V_n(t). \tag{2.4}$$

Phillips 和 Solo[6] 证明着若 $E\varepsilon_1^2 < \infty$ 且 (1.2) 式被满足，则 $\tilde{\varepsilon}_0/\sqrt{n} \to 0(P)$ 且 $\max\limits_{1\le k\le n} \tilde{\varepsilon}_k^2/n \to 0(P)$. 因此线性过程的部分和过程 $\{X_n(t) = \sum\limits_{j=1}^{[nt]} X_j/\sqrt{n}; 0 \le t \le 1\}$ 弱收敛于 Wiener 过程 $\{AW(t); 0 < t < 1\}$ 且

$$\sup_{0\le t\le 1} |V_n(t)| \longrightarrow 0 \quad (P).$$

另一方面，陆传荣和林正炎 [5] 指出定理 1.1 将成立，若我们可证明

$$V_n(1) \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}. \tag{2.5}$$

注意到

$$V_n(1) = \{\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_n\}/\sqrt{n\log\log n}$$

和

$$\frac{|\tilde{\varepsilon}_n|}{\sqrt{n\log\log n}} = \frac{1}{\sqrt{n\log\log n}}\Big|\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big| \le \frac{\Big|\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big|}{\sqrt{n\log\log n}} + \frac{\Big|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\tilde{a}_{n+j}\varepsilon_{-j}\Big|}{\sqrt{n\log\log n}} := I + II. \tag{2.6}$$

若条件 (i) 被满足，由引理 2.1, 我们有 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\tilde{a}_i| < \infty$, 所以 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\tilde{a}_i^2 < \infty$, 因此 $\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{a}_i^2/n = o(1)$, 那么由引理 2.2 我们有

$$I = \frac{\Big|\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big|}{\sqrt{n\log\log n}} \longrightarrow 0 \qquad \text{a.s.}. \tag{2.7}$$

另一方面，因 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_{n+j}|E|\varepsilon_{-j}| < \infty$, 故 $\Big|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\tilde{a}_{n+j}\varepsilon_{-j}\Big| < \infty$ a.s.. 那么 $II \to 0$ a.s., 显然地 $\tilde{\varepsilon}_0/\sqrt{n\log\log n}$ 概率为 1 地趋于零，故我们有 $V_n(1) \to 0$ a.s.. 定理 1.1 证毕. ▌

定理 1.2 的证明

(i) 由 (2.3) 式得

$$\frac{1}{n^{1/p}}S_n = A\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i + \frac{1}{n^{1/p}}\tilde{\varepsilon}_0 - \frac{1}{n^{1/p}}\tilde{\varepsilon}_n. \tag{2.8}$$

从 Komlós, Major and Tusnady (1975, 1976), 若 $E\varepsilon_1^2 = 1$, $E|\varepsilon_1|^p < \infty (p > 2)$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - W(n) = o(n^{1/p}) \quad \text{a.s.},$$

这样为证明 (1.4) 式成立，我们仅需证明

$$\tilde{\varepsilon}_0/n^{1/p}=o(1) \quad \text{a.s.} \tag{2.9}$$

和

$$\tilde{\varepsilon}_n/n^{1/p}=o(1) \quad \text{a.s..} \tag{2.10}$$

由于 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j|a_j|<\infty$, 从引理 2.1 即得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_j|<\infty$, 因此 $E|\tilde{\varepsilon}_0|\leq\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\tilde{a}_j|E|\varepsilon_0|<\infty$. 所以我们有 $|\tilde{\varepsilon}_0|<\infty$ a.s., 这就得证 (2.9) 式成立.

对于 (2.10) 式，类似于 (2.5)–(2.7) 式的讨论，我们有

$$\frac{|\tilde{\varepsilon}_n|}{n^{1/p}}=\frac{1}{n^{1/p}}\Big|\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big|\leq\frac{1}{n^{1/p}}\left\{\Big|\sum_{i=0}^{n}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big|+\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{a}_{n+j}\varepsilon_{-j}\Big|\right\}:=I+II. \tag{2.11}$$

由于 $\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{a}_i^2<c$, 所以 $\sum i=0^n\tilde{a}_i^2/n^{2/p}=o(1)$, 那么由引理 2.2 我们有

$$I=\frac{\Big|\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{a}_i\varepsilon_{n-i}\Big|}{n^{1/p}}\longrightarrow 0 \qquad \text{a.s.,}$$

如上同样讨论，即得证 (1.4) 式成立.

(ii) 从 (2.3) 式，对任给 $C_n\uparrow\infty$, 我们有

$$\frac{1}{C_n\log n}S_n=A\frac{1}{C_n\log n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_n+\frac{1}{C_n\log n}\tilde{\varepsilon}_0-\frac{1}{C_n\log n}\tilde{\varepsilon}_n.$$

由 Komlós, Major and Tusnády (1975, 1976), 若当 $|t|<t_0$ 时 $E\mathrm{e}^{t\varepsilon_1}<\infty$, 我们有

$$A\Big(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k-W(n)\Big)=o(\log n) \quad \text{a.s..}$$

现在为证明 (1.5) 式，我们仅需证明

$$\frac{1}{C_n\log n}|\tilde{\varepsilon}_0|\longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.12}$$

和

$$\frac{1}{C_n\log n}|\tilde{\varepsilon}_n|\longrightarrow 0 \quad \text{a.s..} \tag{2.13}$$

显然 (2.12) 式是成立的. 对于 (2.13) 式，注意到

$$|\tilde{\varepsilon}_n|\leq\max_{1\leq k\leq n}|\varepsilon_k|\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_j|+\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_{j+n}||\varepsilon_{-j}|.$$

因对 $C>2$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}p\Big\{\max_{1\leq k\leq n}|\varepsilon_k|\geq C\log n\Big\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}p\{|\varepsilon_k|\geq C\log n\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}np\{|\varepsilon_1|\geq C\log n\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nE\mathrm{e}^{|\varepsilon_1|}}{n^C}<\infty,\end{aligned} \tag{2.14}$$

即有 $\max\limits_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|/\log n\le C$ a.s., 所以

$$\frac{|\tilde{\varepsilon}_n|}{C_n\log n}\le\frac{C}{C_n}\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_j|+o(1)=o(1).$$

这就得证定理 1.2 成立. ∎

参 考 文 献

[1] 白志东．与回归系数 LS 估计相合性有关的几个问题．数学学报， 1984, **23A**: 704–710
[2] Komlós J, Major P, Tusnády G. An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, I. Z Wahrsch verw Gebiete, 1975, **32**: 111–131
[3] Komlós J, Major P, Tusnády G. An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, II. Z Wahrsch verw Gebiete, 1976, **34**: 33–58
[4] Csörgő M, Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York: Academic, 1981
[5] 陆传荣，林正炎．泛函型强不变原理．中国科学， 1983, **11**: 975–981
[6] Phillips P C B, Solo V. Asymptotic for linear processes. Ann Statist, 1992, **20**: 971–1001
[7] Wang Q Y, Lin, Y X, Gulati C M. The invariance principle for linear processes with applications. Econometric Theory, 2002, **18**: 119–139

Strong Approximations of Linear Processes

[1,2]Lu Chuanrong [1]Qiu Jin
([1]*School of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018;*
[2]*Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028*)

Abstract: In this paper, the authors establish a functional law of iterated logarithm and strong approximations for linear processes generated by a sequence of i.i.d. random variables.

Key words: Linear processes; Strong approximations; Wiener processes.
MR(2000) Subject Classification: 60F15; 60G15; 60F17